CHAPITRE 9

LES VECTEURS

HORS SUJET

TITRE : « Autoportrait (1863) » et « Le Tub (1885) »

AUTEUR : EDGAR DEGAS

PRÉSENTATION SUCCINTE : Edgar Degas (1834-1917) est un peintre français, en général rattaché au mouvement impressionniste, formé à la fin du XIXe siècle, en réaction à la peinture académique de l'époque.

Sa carrière fut dès le départ influencée par les danseuses. En 1874, il commence à se faire connaître, les critiques louant ou dénigrant le réalisme de son travail. Il explore des thèmes comme les repasseuses ou les femmes à leur toilette, multipliant les points de vue audacieux, recherchant des effets lumineux et colorés. Il dit d'ailleurs à propos de ses nus : « Jusqu'à présent, le nu avait toujours été représenté dans des poses qui supposent un public. Mais mes femmes sont des gens simples... Je les montre sans coquetterie, à l'état de bêtes qui se nettoient. »

A partir des années 1880, Degas va aussi poser la question d'une sculpture « impressionniste », réalisant des modèles en cire peints au naturel, qu'il accessoirise ensuite. Seule *La Grande Danseuse* (cf première page) fut présenté de son vivant, les autres modèles l'aidant surtout dans ses peintures. Cette incarnation de la grâce et de l'innocence trahit en réalité la fascination de Degas pour la criminalité. En effet, avec son visage est sculpté sur le modèle des physionomies de criminels définies à l'époque, et la danseuse était un parfait « petit rat », transmettant la syphilis aux bourgeois venant la voir ...

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

L'ESSENTIEL :

- ⇝ Découvrir les vecteurs et la géométrie analytique
- ⇝ Caractérisier et repérer un déplacement
- ⇝ Revoir les formules des milieux et des distances
- ⇝ Faire des opérations sur les vecteurs

« *Quand quelqu'un paye un tableau* 3 000 *francs, c'est qu'il lui plaît.*
Quand il le paye 300 000 *francs, c'est qu'il plaît aux autres.* »
EDGAR DEGAS

Chapitre 9 :

Les vecteurs

Vous allez découvrir dans ce chapitre un nouvel objet mathématique : le vecteur. On le représente par une flèche, plus ou moins longue, qui pointe dans une direction. Elle n'est ancrée à rien, même si elle peut se fixer sur un point précis d'un objet physique ...
Telle est l'essence étrange des vecteurs, à mi-chemin entre une droite bien concrète et une représentation abstraite. Représentation de quoi ? D'un mouvement ou d'une force physique, comme la gravité qui nous rive au sol ...
Le mot vecteur vient du latin "vector", dérivé du verbe "vehere", qui signifie transporter. Un vector pourrait donc désigner un véhicule, par exemple un chariot, son point de départ n'ayant pas d'importance sur sa nature.
De fait, c'est le caractère abstrait des vecteurs qui explique qu'ils aient mis des siècles pour passer de la notion intuitive à un concept mathématique et physique formel, au XIX^e siècle.
En particulier, c'est la nature peu maniable de la droite géométrique, telle que l'avait définie le grec Euclide au III^e avant JC, qui a progressivement conduit à la formalisation des vecteurs. En effet, Euclide décrit dans son ouvrage L*es Elements* la droite comme « une longueur sans largeur », dont « les limites sont des points » et « qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle ». Si ces définitions conduisent à l'idée de distance entre points, cela laisse peut de place aux opérations mathématiques... Quelles manipulations sont permises ? ?
Mais l'oeuvre d'Euclide traverse les siècles et progressivement les manipulations de figures sont associées à des équations algébriques qui libèrent la droite de ses contraintes géométriques, notamment au XI^e sicèle, grâce au le poète, philosophe et mathématicien perse Omar Khayyâm. La symbiose entre la géométrie et l'algèbre se fera au XVII^e siècle, grâce à René Descartes et son invention des coordonnées (dites cartésiennes).
Pourtant c'est la physique, entre 1604 et 1687, qui rendra les vecteurs indispensables, car ils incarneront les notions de vitesse, d'accélération et de force s'exerçant sur un solide. C'est Galilée qui lance ce processus, par la découverte des premières lois du mouvement d'un solide.
Chez Galilée, les notions de vitesse et d'accélération restent informelles, tout comme celle de force qui attire les corps vers le sol, mais elles conduiront l'anglais Isaac Newton, en 1687, à leur donner un sens clair via le concept de vecteur.
Newton instaure également les règles d'addition entre forces, entre accélérations, entre vitesses ... qui sont celles des vecteurs tels qu'on les connait aujourd'hui.
Pour finir, disons que les savants du XIX^e incluront les vecteurs dans un cadre plus large, celui des tenseurs, dont Einstein fera grand usage dans sa théorie de la relativité, qui généralise la théorie de Newton.
Mais tout cela n'aurait pu aller si loin sans repérage ... En effet, manipuler les vecteurs devient très simple une fois que l'on a introduit un repère. C'est pour cela que nous allons également revoir les bases de repérage dans le plan, utiles à bien d'autres occasion d'ailleurs. Par exemple, les planisphères et les cartes géographiques maritimes sont construits dans un repère comprenant l'axe vertical des latitudes et l'axe horizontal des longitudes. La position d'un bateau peut alors être définie par ses coordonnées sur la carte, c'est-à-dire la longitude et la latitude.
Lorsque l'on cherche une position sur un plan de ville, on se repère également à l'aide des axes verticaux et horizontaux du plan.

I) Décrire un déplacement rectiligne

I.1. Un nouveau déplacement : la translation

Travail de l'élève 1 : ***Découverte d'une nouvelle transformation***

Edgar le pigeon voyageur veut devenir agent du FBI (Federal Birds Investigation).

Pour cela, il doit être initié. Sa première épreuve est donnée par le message suivant :

> ***Message Top Secret***
>
> « Vous devez sauver de la noyade des vers de terre primordiaux pour la sécurité des oiseaux.
> Ils sont allés trop près d'une rivière en crue ces nigauds !
> Pour cela, déplacez les vers de terre C, E et A suivant **la translation qui transforme A en B**.
> PS : il est formellement interdit de les manger en route !
> PPS : ce message s'autodétruira dans 30 secondes. »

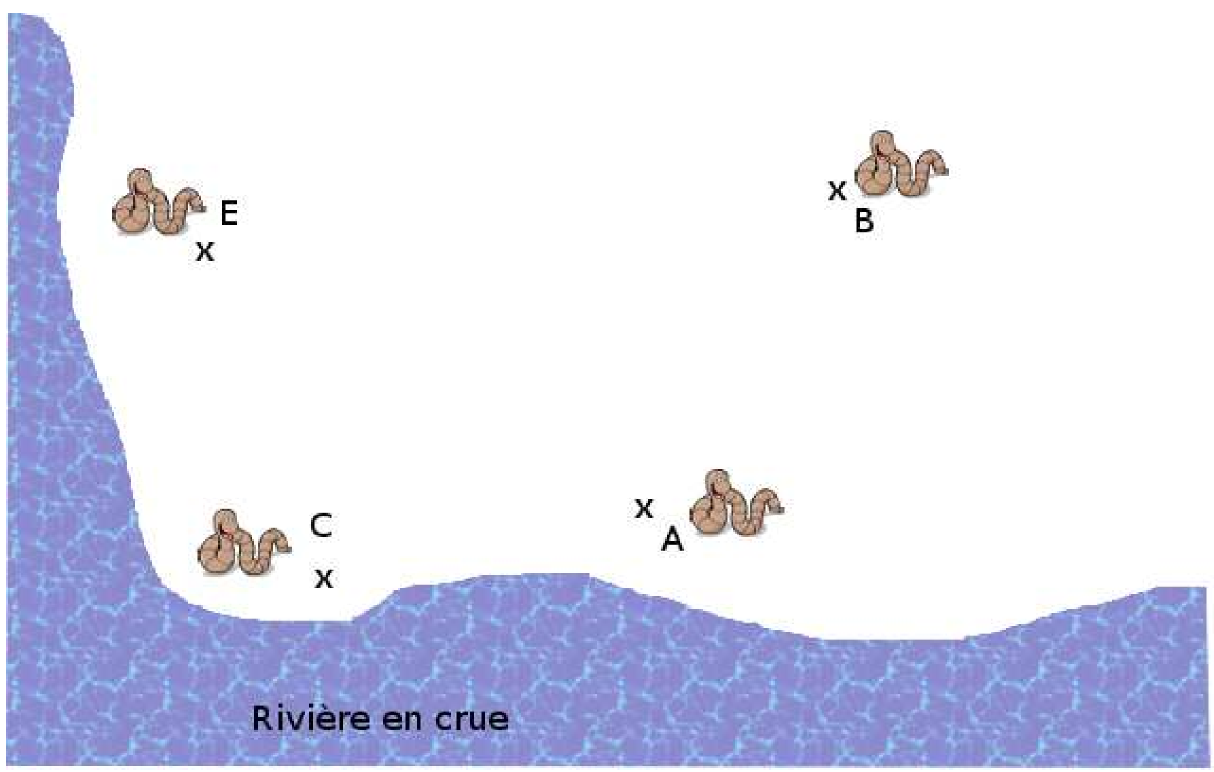
Edgar n'est qu'un pigeon, et se demande bien ce qu'est une translation ...

Il se remémore ses souvenirs de collège en mathématiques, et se souvient d'avoir déjà déplacer des vers de terre, mais selon d'autres transformations.

1. A quelles transformations pense Edgar ?
2. Edgar va donc voir son ancien enseignant de mathématiques, M. Ragot, pour l'aider officieusement sur le sens de ce message. Voici ce que ce dernier lui explique :

   « Pour déplacer le ver de terre C en D, tu dois faire en sorte que $[AD]$ et $[BC]$ aient le même milieu »

   Où Edgar doit-il placer le point D sur le plan de la situation suivant ? Expliquer votre démarche de construction.



3. Edgar prend ensuite son envol pour aller chercher le ver de terre E, mais il constate, vu d'en haut, que le quadrilatère ABDC est particulier et se demande s'il s'agit d'un hasard.
   Quelle est la nature de ABDC et pourquoi ? $\boxed{\textbf{STOP PROF}}$

Définition 1.

Soient A et B deux points du plan.
La **translation qui transforme** A **en** B est la transformation qui associe un point C à l'unique point D tel que $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu, ce qui revient à dire à l'unique point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

Attention !

L'ordre des lettres est important !

4. Déplacer alors le ver de terre E en F, en utilisant la constatation précédente (à la règle et au compas).
5. A quel endroit Edgar doit-il déplacer le ver de terre A ?
6. Edgar aime les énigmes, mais en regardant en vol les déplacements effectués des vers de terre, il trouve tout de même qu'on aurait pu les lui expliquer plus simplement.
Et vous, quelle serait votre manière simple de l'expliquer à un camarade ?

Objectifs :

- Rappeler aux élèves qu'ils ont déjà vu des transformations
- Les pigeons donnent un côté ludique, tout en faisant bien comprendre que la translation est un déplacement, même si on n'étudiera pas cette transformation.
- Faire construire aux élèves des images de points par un même translation de différentes manières, en particulier sans quadrillage, pour bien remémorer les constructions au compas notamment (utiles pour les sommes)
- Introduire l'utilité de définir un nouvel objet mathématique : les vecteurs.

La dernière question de l'activité n'attend pas de réponse individuelle des élèves. Il s'agit plutôt d'une mise au point commune sur l'ensemble des constructions et d'un échange d'idées sur la définition initiale de la translation ainsi que la description précise d'un chemin. On espère d'eux qu'ils évoqueront la représentation par une flèche de ces chemins, le côté rectiligne, voire la direction, le sens et la longueur, sans formalisation.

Ensuite, pour compléter l'activité, il semble jusdicieux d'utiliser Géogébra afin d'introduire le vocabulaire.
Pour cela, on peut projeter au tableau un quadrillage mais sans axe et un point A que l'on cherche à déplacer.

Objectifs :

- Faire apparaître la nécessité d'un chemin de référence (sous-jacente la notion de représentant de vecteur)
- Introduire le mot vecteur en affichant la « flèche » symbolisant le chemin à parcourir
- Rajouter ensuite d'autres points à déplacer selon la translation donnée, et chercher dans Géogébra si on peut le faire sans passer par les parallélogrammes (ni les carreaux). Ceci permet d'introduire la translation de vecteur.
- Le quadrillage permet de bien voir ce qui se passe, et l'absence d'axes évite de « figer » les vecteurs à un endroit précis.
- On peut ensuite faire d'autres translations, notamment celle de vecteur égal ou opposé au premier, ou des translations successives, etc, suivant la curiosité de la classe.

Dans toute cette partie, A et B désignent deux points du plan.

Définition 2.

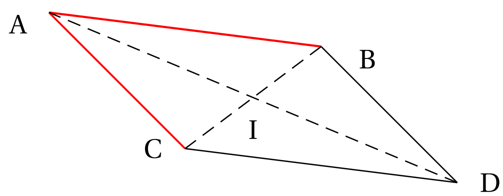
On associe à la translation qui transforme A en B un nouvel objet mathématique : le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$.
Il symbolise le déplacement rectiligne de A vers B et on le représente par une flèche allant de A vers B.
On appellera désormais cette transformation la **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$. On notera $t_{\overrightarrow{AB}}$.

Remarques :

- On peut retenir que la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ revient à déplacer des points selon le même chemin que celui rectiligne qui va de A vers B.
- On comprend ainsi bien que la translation est un déplacement, ie qu'elle conserve les longueurs, l'alignement et les angles.

Exemples : Avec les parallélogrammes

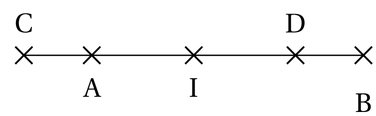
A, B, et C trois points donnés non alignés :



$[BC]$ et $[AD]$ ont même milieu I

ABDC est un parallélogramme

A, B, et C trois points donnés alignés :



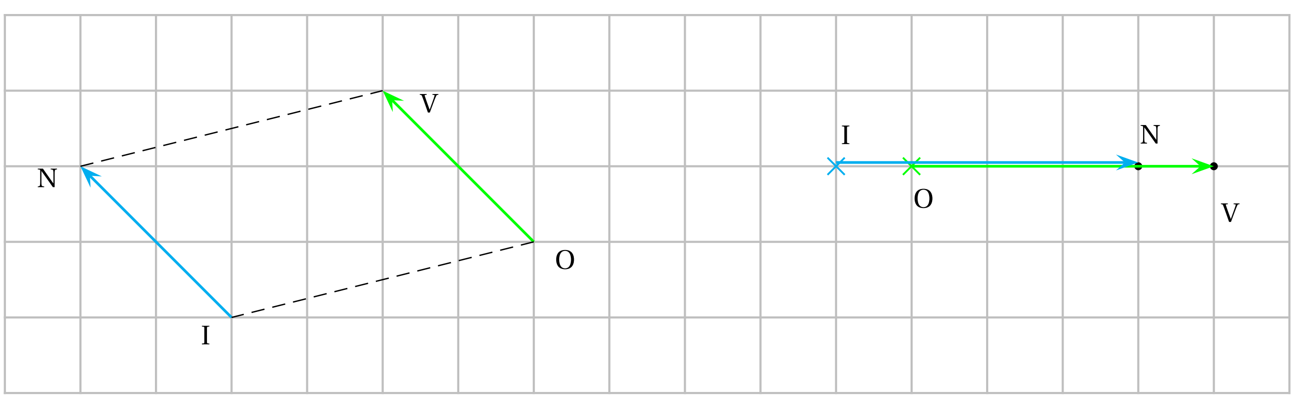
$[BC]$ et $[AD]$ ont même milieu I

ABDC est un parallélogramme aplati

Exemples : Avec les vecteurs et le quadrillage

O, V, et I non alignés

O, V, et I alignés



OVNI est un parallélogramme

OVNI est un parallélogramme aplati

Remarques :

- Le mot vecteur vient du latin « vector », dérivé du verbe « vehere », qui signifie transporter. Un vector désigne donc un véhicule, par exemple à l'époque un chariot.
- Si les points A et B sont confondus, tout point M est confondu avec son image par la translation. Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé vecteur nul et on note $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

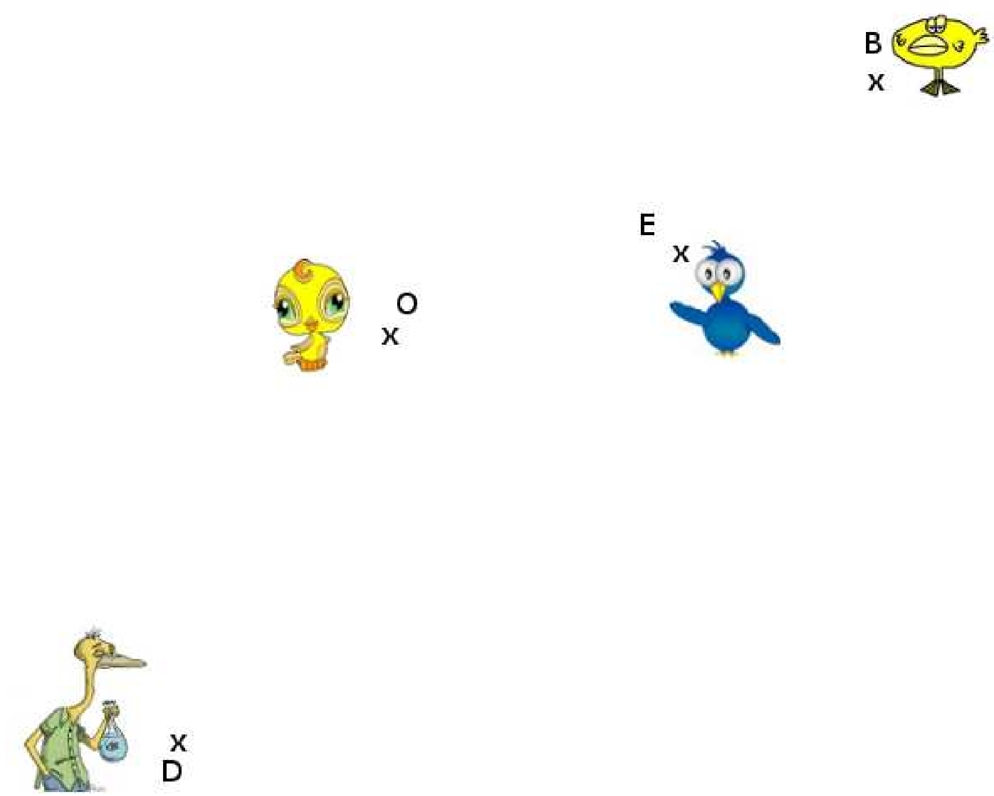
Exercice(s) du livre : Hyperbole : n° 1-2 p 204

I.2. De nouveaux objets : les vecteurs

Travail de l'élève 2 : Edgar le pigeon voyageur a réussi avec succès son initiation.
Le FBI lui confie donc sa première mission officielle.

> ***Message Top Secret***
>
> « Suivez à distance Odile, un oiseau accro aux poissons rouges, elle vous guidera jusqu'à son Dealer.
> Pour cela, effectuez exactement le même déplacement qu'elle, mais depuis votre position de départ.
> Ensuite, laissez la rentrer chez elle et allez arrêter le Dealer.
>
> *Signé* : The Boss
>
> PS : il est formellement interdit de vous droguer avec les poissons rouges trouvés !
> PPS : ce message s'autodétruira dans 30 secondes. »

Voici le plan de la situation.



1. Odile prend le chemin le plus court pour aller de chez elle (O) à son Dealer (D).
   Représenter sur le graphique ce trajet par l'objet mathématique approprié et le nommer.
2. Edgar part du point E. Il suit la consigne du message top secret et effectue exactement le même déplacement qu'Odile.
   Comment s'appelle ce déplacement ?
3. Placer sur le graphique le point E' où Edgar se trouve alors.
4. Comme il s'agit de la première mission d'Edgar, the Boss décide de le suivre pour vérifier qu'il remplit correctement sa mission. Il suit donc Edgar en effectuant le même déplacement que lui, à partir de B.
   De quel déplacement s'agit-il ? Placer sur le graphique le point B' où le Boss se trouve alors.
5. Donner trois parallélogrammes sur le graphique.
6. Que pouvez-vous dire des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EE'}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BB'}}$?
7. Odile rentre directement chez elle. Représenter sur le graphique ce trajet retour et le nommer.

8. Quel lien ce vecteur a-t-il avec $\overrightarrow{OD}$?
9. En regardant la situation globale, quelle translation Odile a-t-elle effectuée ?
10. Edgar va ensuite arrêter le Dealer en D. Représenter sur le graphique son trajet et le nommer.
A-t-il un lien avec les vecteurs précédents ?
11. Si Edgar avait su dès le départ (point E) où était le Dealer, quel est trajet le plus court qu'il aurait pu faire ?

Objectifs :

- Construire des translations grâce à des parallélogrammes, au compas.
- Constater que des vecteurs sont « les mêmes », donc « égaux » en vocabulaire mathématiques
- Introduire le vecteur opposé, le vecteur nul, et même la notion de somme sous jacente (aller + retour d'Odile, trajet complet d'Edgar)

Propriété 1. (Egalité de vecteurs)

Soient A, B, C et D quatre points avec A et B distincts.

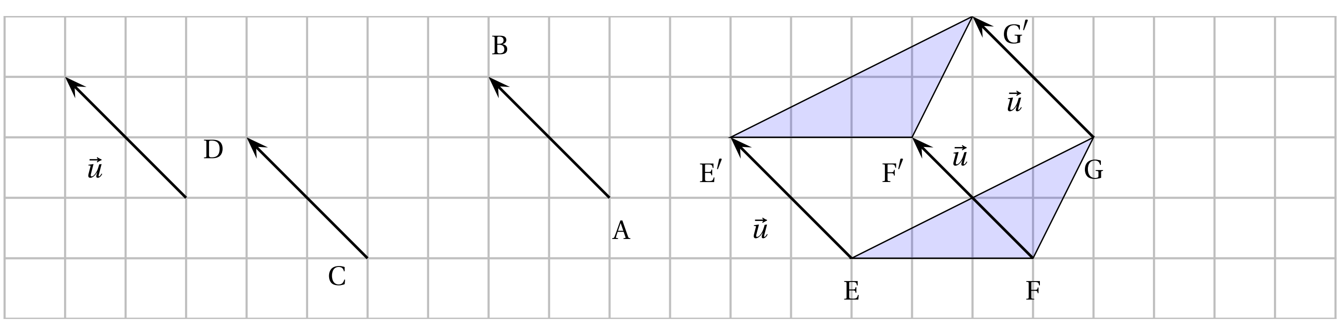
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont associés à la même translation.
$\iff$ D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$
$\iff$ ABDC est un parallélogramme, éventuellement aplati.
$\iff$ [AD] et [BC] ont le même milieu
$\iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction, le même sens et la même longueur.

Remarques :

- Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux, on peut leur donner un même nom, par exemple $\vec{u}$. On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.
- Le vecteur nul n'a ni direction, ni sens et sa longueur vaut 0.
- Ainsi, un vecteur est indépendant de son origine, seul compte le trajet effectué entre son départ et son arrivée.
- La longueur d'un vecteur $\vec{u}$ est aussi appelée **norme**. C'est un donc nombre positif ou nul.
On la note $||\vec{u}||$. Ainsi $||\overrightarrow{AB}|| = AB$.

Exemples :

Sur la figure suivante : $\vec{u} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ et $E'F'G'$ est l'image de EFG par la translation de vecteur $\vec{u}$, représenté 6 fois, à 6 endroits différents (un vecteur n'a pas d'origine fixe, on peut le dessiner n'importe où).



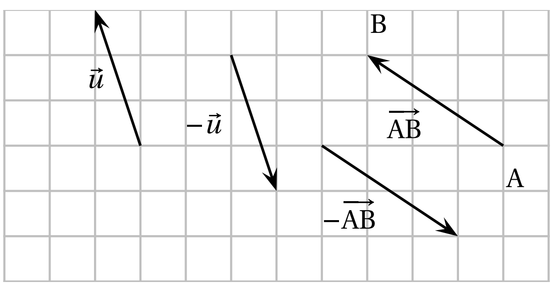
Exemple :
Associer à chaque égalité vectorielle la phrase correspondante, et illustrer chaque cas par un schéma :

1. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
3. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

(a) ABCD est un parallélogramme
(b) ABDC est un parallélogramme
(c) D est le milieu de $[AB]$

Définition 3. (Vecteur opposé)

Le **vecteur opposé** au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur associé à la translation qui transforme B et A.
C'est le vecteur $\overrightarrow{BA}$, aussi noté $-\overrightarrow{AB}$.



Remarque : Deux vecteurs sont opposés lorsqu'ils ont la même direction, la même longueur, mais des sens opposés.

Exercice(s) du livre : Hyperbole : n° 5-6-7-9-10 p 204

II) Opérations sur les vecteurs

II.1. Somme de vecteurs

Travail de l'élève 3 : Edgar le pigeon voyageur est désormais un agent certifié du FBI.
Pour sa nouvelle mission, il s'est rendu sur l'île Noire. A l'aéroport, the Boss lui remet le message suivant :

Message Top Secret

« Vous devez trouver Titi, un Tigre Terroriste qui passe son temps à torturer les oiseaux de l'île Noire. Ci-joint le schéma de l'île. L'Aéroport où nous sommes est au point A.

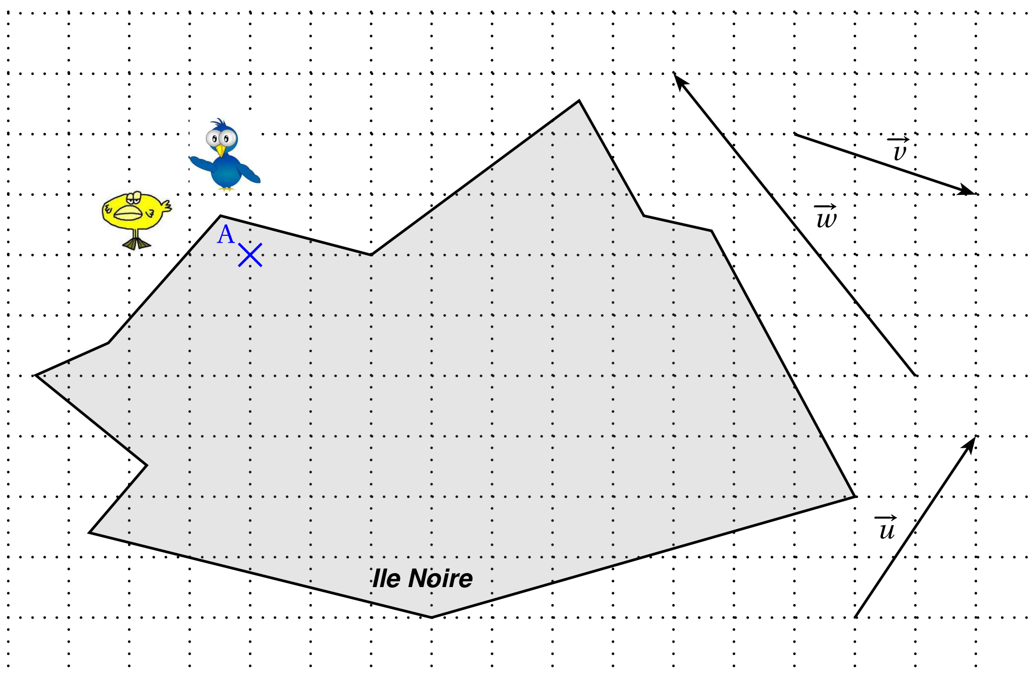
Rejoignez de suite votre Indicateur au point I tel que $\overrightarrow{AI} = -\vec{u}$.

Lorsque vous connaitrez la position de Titi, vous m'indiquerez un chemin pour aller l'arrêter.

Signé : The Boss

PS : Attention, il y a un repère de Pirates sur l'île, ne vous égarez pas !

PPS : Ce message s'autodétruira dans 30 secondes. »



1. Placer le point I sur le schéma.
2. Edgar va donc jusqu'en I retrouver son Indicateur. Il lui demande, apeuré, la position des Pirates.

Indice 1

« Les Pirates se trouvent au point P. Pour le situer depuis l'Aéroport, il faut se déplacer successivement selon la translation de vecteur $\vec{u}$ puis selon celle de vecteur $\vec{v}$. »

Placer le point P sur le schéma. **STOP PROF**

Questions orales **:**

⇝ Comment pourrait-on décrire le vecteur $\overrightarrow{AP}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?
On dit que $\overrightarrow{AP} = \vec{u} + \vec{v}$.

⇝ L'ordre dans lequel on effectue les translations a-t-il une importance ?

⇝ On nomme C l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$. Décrire le vecteur $\overrightarrow{AP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CP}$.
On a $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$.

3. L'Indicateur donne ensuite l'indice suivant à Edgar :

Indication 2
« Si tu pars du point T, où se cache Titi, et que tu effectues la translation de vecteur $\vec{w}$, alors tu seras chez les Pirates. »

Où se trouve Titi ?

4. Quelle translation permet aux Pirates d'aller de leur repère à la cachette de Titi ?
5. Edgar téléphone ensuite à the Boss pour lui décrire la translation de vecteur $\overrightarrow{AT}$ à effectuer.
   a. Décrire cette translation en fonction des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
   b. Quelle égalité de vecteurs peut-on en déduire ?
   c. Il existe bien d'autres manières de décrire le vecteur $\overrightarrow{AT}$.
   Trouver celle en fonction du vecteur $\vec{v}$.
6. Edgar de son côté, doit effectuer la translation de vecteur $\overrightarrow{IT}$.
   Donner trois descriptions différentes de ce vecteur en utilisant les points de la figure.

Objectifs :

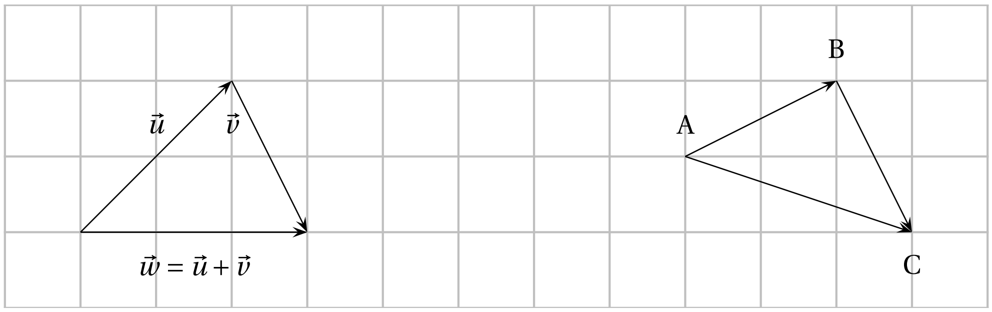
- Travailler sur les vecteurs opposés et représentant de vecteurs (translation de vecteur opposé, retrouver l'origine en connaissant l'arrivée)
- Introduire la notion de somme de vecteurs en construisant des translations successives
- Amener les élèves eux-mêmes à parler de multiplcation de vecteurs par un nombre entier positif, afin d'en saisir le sens à partir de l'addition, même si cette opération est censé être présentée avec les coordonnées.
- Introduire la relation de Chasles et la manipuler « dans tous les sens », constater qu'elle ne s'applique pas si on a des coefficients différents devant les vecteurs que l'on ajoute, etc

Dans la suite du chapitre, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs quelconques du plan, et A, B et C trois points.

Définition 4. (Somme de vecteurs)

On dit que le vecteur de la translation obtenue en appliquant successivement les translations de vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, est **la somme des vecteurs** $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Ce vecteur est noté $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

Illustrations :



$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

sont associés

à la même translation

donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

Propriété 2. (Relation de Chasles)

Pour tous points A, B et C :

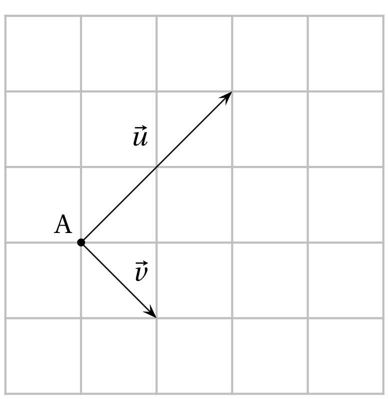
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Remarques :

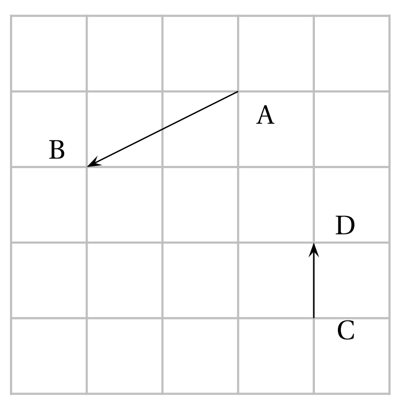
- On retiendra que pour les vecteurs, les « détours » ne comptent pas.
  Ainsi, aller de A en B, puis de B en C revient à aller directement de A en C.
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ et $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.
  Autrement dit, l'addition de vecteurs possède les mêmes propriétés que l'addition de réels (associativité, communativité, élément neutre).
- Pour construire l'image d'un point M par une translation associée à une somme de vecteurs, on dispose les vecteurs « bout à bout » en partant du point M.

Exemples :

1. Construire M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$ sur le schéma ci-dessous :



2. Construire E sur le schéma ci-dessous tel que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$



Exemple :

Montrer que pour tous points A, B, C et D on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + (-\overrightarrow{DB}) = \vec{0}$.

Vérifier sur une figure.

Exercice(s) du livre : Hyperbole : n° **24**-25-**26**-27-29-30 p 206

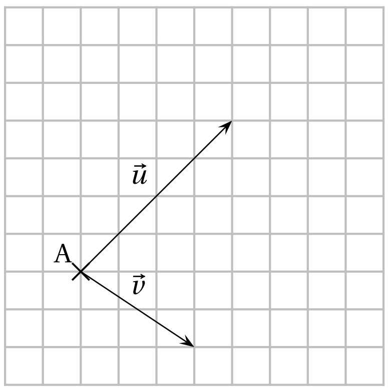
II.2. Conséquences

Définition 5. (Différence de vecteurs)

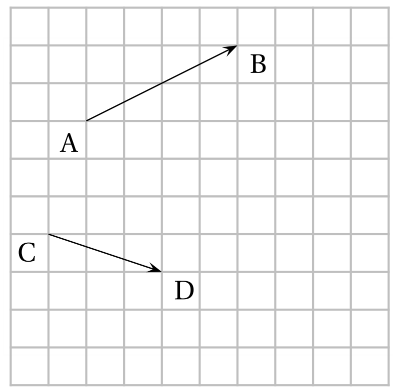
La **différence de deux vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u}-\vec{v}$ obtenu en ajoutant à $\vec{u}$ l'opposé de $\vec{v}$.
Autrement dit, on a $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$.

Exemples :

1. Construire M tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\vec{u}-\vec{v}$ sur le schéma ci-dessous :



2. Construire E sur le schéma ci-dessous tel que $\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}$



Exemple :

Montrer que pour tous points E, F, G et H on a : $-\overrightarrow{\mathrm{FE}}+\overrightarrow{\mathrm{HG}}-\overrightarrow{\mathrm{EG}}+\overrightarrow{\mathrm{FH}}=\vec{0}$.
Vérifier sur une figure.

Exercice(s) du livre : Hyperbole : n° 41-42-44 p 206

Définition 6. (Produit d'un vecteur par nombre entier)

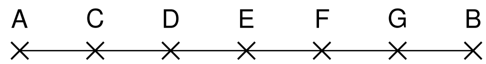
Soit $k\in\mathbb{N}$.
Le produit d'un vecteur $\vec{u}$ par l'entier naturel k est le vecteur associé à la translation résultant de k l'enchaînement successifs de la translation de vecteur $\vec{u}$. On le note $k\vec{u}$.
Le produit d'un vecteur $\vec{u}$ par $-k$ est le vecteur noté $-k\vec{u}$. C'est le vecteur opposé de $k\vec{u}$.

Remarques :

- Le vecteur $k\vec{u}$ a la même direction et le même sens que le vecteur $\vec{u}$. Par contre, sa longueur est égale à k fois celle de $\vec{u}$.
- On étend cette définition de la multiplication d'une vecteur par un nombre entier relatif aux nombres réels.
- Les droites portées par les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont parallèles (strictement ou confondues).
- On note $||\vec{u}||=|k|\vec{u}$ où $|k|$ désigne la distance à 0 du nombre k (c'est donc un nombre positif). Ce nombre $|k|$ s'appelle valeur absolue de k.
- Si $k=0$, on pose $k\vec{u}=\vec{0}$.

Exemple :

Le segment $[\mathrm{AB}]$ est divisé en six parties de même longueur.



1. Compléter les relations suivantes par la lettre qui convient :

a. $\overrightarrow{\mathrm{E}\ldots} = -2\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ **b.** $\overrightarrow{\mathrm{C}\ldots} + \overrightarrow{\ldots\mathrm{G}} = \vec{0}$ **c.** $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -6\ldots\ldots$

2. Compléter les relations suivantes par le nombre qui convient :

a. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \ldots\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ **b.** $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \ldots\overrightarrow{\mathrm{BF}}$ **c.** $\overrightarrow{\mathrm{BF}} = \ldots\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ **d.** $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \ldots\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

Exercice(s) du livre : Hyperbole : n° 34-35-40 p 206 (k réel)
36-43 p 206 (k entier)
73 p 210 (correction de copies d'élèves)
57-58-62 p 209 (démonstrations géométriques)
60-63 p 209 (Chasles)

Remarque : On a vu que les vecteurs permettaient de décrire des déplacements rectilignes. Cependant, il serait bien pratique de décrire les vecteurs aussi !

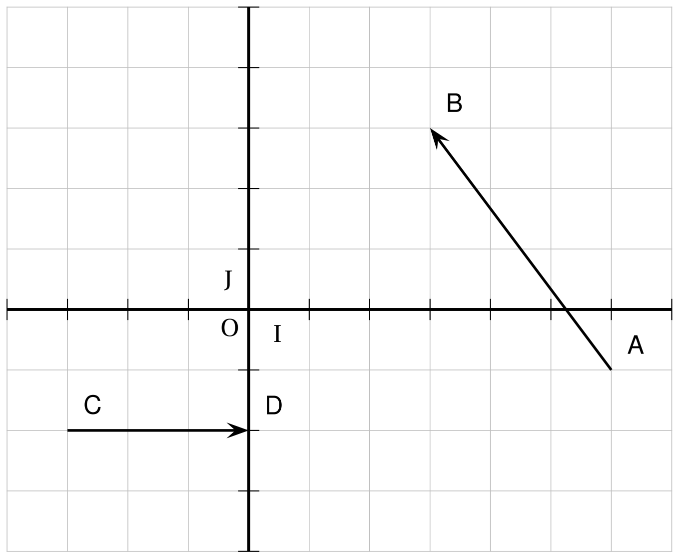
Pour cela, on a vu que l'on pouvait se ramener à des parallélogrammes, ou encore utiliser le quadrillage.

Cette dernière méthode fait penser que l'on pourrait peut-être décrire un vecteur par des coordonnées ...

III) Repérer un déplacement rectiligne

III.1. Coordonnées d'un vecteur

Travail de l'élève 4 :



1. Construire sur la figure ci-dessus :
   a. L'image M_1 de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$
   Quelles sont les coordonnées de M_1 ?
   Quel lien pouvez-vous faire avec le vecteur $\overrightarrow{OM_1}$? avec le vecteur $\overrightarrow{AB}$?
   b. L'image M_2 de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$
   Quelles sont les coordonnées de M_2 ?
   Quel lien pouvez-vous faire avec le vecteur $\overrightarrow{OM_2}$? avec le vecteur $\overrightarrow{CD}$?
2. Compléter le tableau suivant avec les coordonnées :

Point de départ	$A(\ldots;\ldots)$	$C(\ldots;\ldots)$	$B(\ldots;\ldots)$	$D(\ldots;\ldots)$	$C(\ldots;\ldots)$	$D(\ldots;\ldots)$
Point d'arrivée	$B(\ldots;\ldots)$	$D(\ldots;\ldots)$	$A(\ldots;\ldots)$	$A(\ldots;\ldots)$	$B(\ldots;\ldots)$	$B(\ldots;\ldots)$
Vecteur associé	$\overrightarrow{AB}(\ldots;\ldots)$					

3. Conjecturer une formule sur les coordonnées de A et B pour trouver celle du vecteur $\overrightarrow{AB}$

A partir de maintenant, on munit le plan d'un repère.

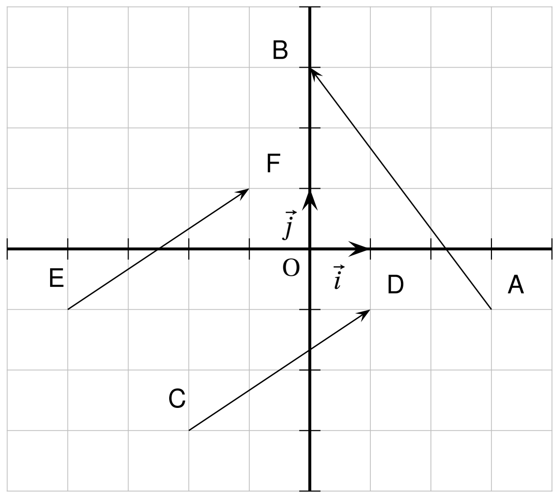
Définition 7.

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ les coordonnées du point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Si $M(x;y)$, on note $\vec{u}(x;y)$ ou encore $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Remarques :

- Le couple $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ correspond également au déplacement effectué sur le quadrillage.
- Celles-ci sont donc indépendantes de l'origine du repère.
- Bien souvent, au lieu de noté $(O;I;J)$ un repère, on notera $(O;\vec{i};\vec{j})$ avec $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$.
  Il s'agit d'un repérage en deux dimensions (évoquer la droite et l'espace).

Exemple :



Sur cette figure, on a $\overrightarrow{AB}(-3;4)$, $\overrightarrow{CD}(3;2)$ et $\overrightarrow{EF}(3,2)$

Propriété 3.

Deux vecteurs sont égaux ssi ils ont les mêmes coordonnées dans un repère.

$$\vec{u}(x;y)=\vec{v}(x';y') \iff x=x \text{ et } y=y'$$

Preuve

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On pose $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OM'}$.
Ainsi $\vec{u}=\vec{v}$ ssi $M=M'$, c'est-à-dire que M et M' ont les mêmes coordonnées. Autrement dit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont les mêmes coordonnées.

Exemple :

Dans l'exemple précédent, on a donc $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$

Propriété 4.

Si A et B sont deux points de coordonnées respectives $(x_A;y_A)$ et $(x_B;y_B)$ alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont

$$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$$

Preuve

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on note M le point tel que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OM}$.
Alors [AM] et [OB] ont le même milieu I.
D'où $x_I=\dfrac{x_B}{2}$ et $y_I=\dfrac{y_B}{2}$ et $x_I=\dfrac{x_A+x_M}{2}$ et $y_I=\dfrac{y_A+y_M}{2}$.
On en déduit que $\dfrac{x_A+x_M}{2}=\dfrac{x_B}{2}\iff x_A+x_M=x_B\iff x_M=x_B-x_A$.
De même on trouve $y_M=y_B-y_A$.
Donc $\overrightarrow{OM}(x_B-x_A;y_B-y_A)$. Comme $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OM}$ on a aussi $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$

Exemple :

Soient $A(2;3)$ et $B(5;-4)$. Alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(3;-7)$.

Attention !

Ne pas confondre cette formule avec celle des coordonnées du milieu d'un segment !

III.2. Norme d'un vecteur dans un repère orthonormé

Propriété 5.

Soit $\vec{u}(x;y)$ un vecteur dans un repère **orthonormal** $(O;\vec{i};\vec{j})$. Alors

$$||\vec{u}||=\sqrt{x^2+y^2}$$

En particulier, on a pour $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$:

$$||\overrightarrow{AB}||=AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Preuve

Découle de la formule de la distance entre deux points dans un repère orthonormé et de la formule des coordonnées d'un vecteur.

Exemple :

Dans l'exemple précédent,on avait $\overrightarrow{AB}(3;-7)$. Donc dans un repère orthonormé on a

$$||\overrightarrow{AB}||=AB=\sqrt{3^2+(-7)^2}=\sqrt{9+49}=\sqrt{58}$$

Exercice(s) du livre : Hyperbole : n° 15-20-21 p 161 (distance)
n° **12-14**-15-17-18 p 205 (norme)
Déclic : n° 22 p 231 (algo)

III.3. Opérations sur les vecteurs et coordonnées

Propriété 6.

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et k un nombre réel. Si $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ alors :

$\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x';y+y')$ et $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx;ky)$

Exemple :
On donne les points $A(-3;1)$, $B(5;2)$ et $C(0;-1)$.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+1.5\overrightarrow{OB}$
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{v}=5(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{OC})$
3. Déterminer les coordonnées du point M défini par $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}$

Exercice(s) du livre : Hyperbole : n° 20-**21**-22 p 205 (addition)
31-32-34-36-40 p 206

IV) Colinéarité

IV.1. Vecteurs colinéaires

Travail de l'élève 5 : Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan.
Soient cinq points $A(2;5)$, $B(-1,4)$, $C(8;7)$, $D(0;-4)$ et $E(4.5;-0.5)$

1. Faire un schéma.
2. a. Trouver les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ED}$.
   b. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{ED}$.
   c. Que peut-on en déduire sur la direction de ces deux vecteurs ? sur les droites (AB) et (ED) ?
3. a. Trouver les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   c. Que peut-on en déduire sur la direction de ces deux vecteurs ? sur les droites (AB) et (AC) ?
   d. Que peut-on alors en déduire pour les points A, B et C ?

Définition 8.

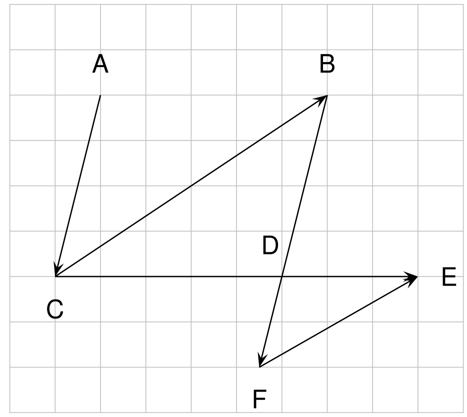
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires lorsqu'ils ont la même direction.

Théorème 1.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.

Autrement dit, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires ssi leurs coordonnées sont proportionnelles.

Exemple :
Citer des vecteurs colinéaires de la figure ci-dessous et traduire par une relation vectorielle :



Exemples :
$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4.5\\6\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ? Même question pour $\vec{s}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{g}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

Exercice(s) du livre : Hyperbole : n° 46-47 p 207

IV.2. Application à la géométrie

Propriété 7.

Soient A, B, C et D quatre points du plan deux à deux distincts.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Corollaire 1.

Soient A, B et C trois points du plan deux à deux distincts.
Les points A, B et C sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Méthode
Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit de démontrer que deux des vecteurs formés par les trois points sont colinéaires.

Exemple :
On donne $A(-4;-1)$, $B(-1;1)$, $C(3;3)$, $D(-1;-3)$ et $E(5;1)$.

1. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.
2. En déduire la nature du quadrilatère ABED
3. Les points A, B, C sont-ils alignés ?

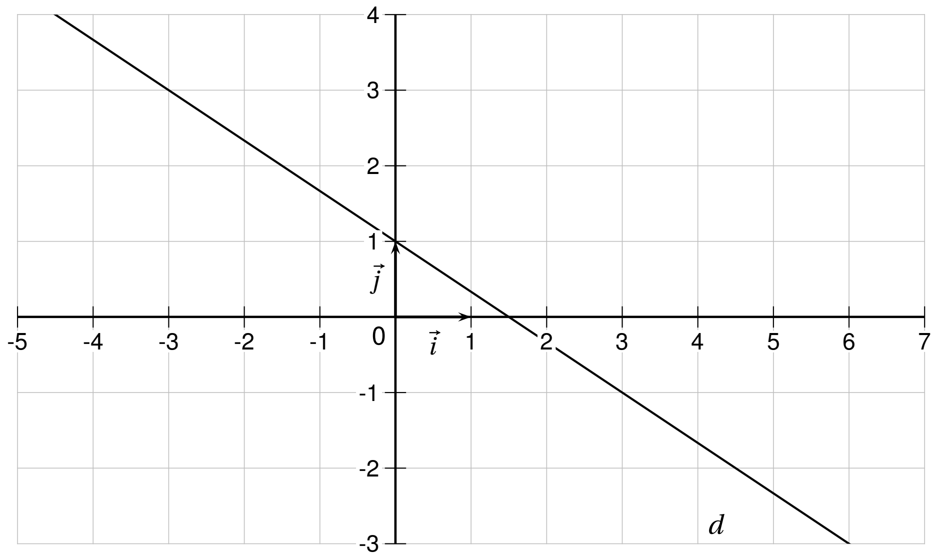
Exemple :

Soit ABC un triangle et M tel que $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et N tel que $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Montrer que A, M et N sont alignés.

Exercice(s) du livre : Hyperbole : n° 49-50-51 p 207 + 38 p 182 Déclic : n° 68 p 307 + 80 + 81 p 309 (algo)

IV.3. Equation de droite ?

 **Travail de l'élève 6** :



1. Soit la droite d représentée ci-dessus.
   - a. Déterminer graphiquement la fonction affine qu'elle représente.
   - b. Dire si les points suivants appartiennent à d ou non.

$$A\left(-1;\frac{5}{3}\right) \qquad B\left(100;-\frac{197}{3}\right) \qquad C\left(0;\frac{1}{3}\right) \qquad D(-3;3)$$

   - c. Calculer l'ordonnée du point E d'abscisse 0 appartenant à d.
   - d. Calculer l'abscisse du point F d'ordonnée 1 appartenant à d.
2. Soit d' la droite passant par $K(3;2)$ et de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.
   - a. Tracer d' dans le repère ci-dessus.
   - b. Trouver par le calcul les coordonnées du point d'intersection de d' avec l'axe des ordonnées.
   - c. En déduire la fonction affine que d' représente, puis l'équation de d'.
3. Soient $A(2;0)$, $B(2;-15)$ et $E(2;2010)$.
   - a. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
   - b. La droite (AB) est-elle représentative d'une fonction affine ?
   - c. Soit $M(x;y)$ un point du plan. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur ses coordonnées pour que $M \in (AB)$.
   - d. Construire dans le repère les droites d'équation $x=0$, $x=-3$ et $x=\frac{7}{2}$.

Remarque : Dans le plan muni d'un repère, une droite peut être :

- ⇝ Soit parallèle à l'axe des ordonnées,
- ⇝ Soit sécante à l'axe des ordonnées : c'est alors la courbe représentative d'une fonctin affine.

Propriété 8 :

- Une droite d, parallèle à l'axe des ordonnées a une équation du type $x = c$, où $c \in \mathbb{R}$.
- Une droite d sécante à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $y = mx + p$, où m et p sont des nombres réels.

Remarque : Cela signifie qu'un point $A(x_A; y_A)$ appartient à $d : y = mx + p$ si et seulement si $mx_A + p = y_A$

Définition 9 :

Une équation de la droite d, de la forme $y = mx + p$ est appelée **équation réduite** de d, m son **coefficient directeur** et p son **ordonnée à l'origine**.

Remarque : L'équation réduite d'une droite est unique.

Propriété 9 :

Deux droites d'équation $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles ssi $m = m'$.
Si deu xplus, $p = p'$, alors elles sont confondues.
Deux droites d'équation $x = c$ et $x = c'$ sont toujours parallèles (puisque toutes deux parallèles à (Oy).

Exemple :

Les droites d'équation $y = 36.5x - 54$ et $y = 36.5x + \pi$ sont parallèles.

Propriété 10 : ***Défintion***

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points.

Alors on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ est **un vecteur directeur** de la droite (AB).

De plus, si A et B n'ont pas la même abscisse (ie $x_A \neq x_B$ ou encore (AB) non parallèle à l'axe des ordonnées) alors le coefficient directeur de la droite (AB) est

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Remarque : On retrouve la fait que deux droites sont parallèles si et seulement si leur vecteur directeur sont colinéaires, puisque ceci équivaut à ce que leurs coordonnées soient proportionnelles.

Exemple :

Soient $A(-1,3)$ et $B(4,13)$. On constate de suite que $x_A \neq x_B$ donc (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées et son équation est du type $y = mx + p$.

On commence alors par chercher son coefficient directeur : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{13-3}{4-(-1)} = 2$.

Donc on sait que $y = 2x + p$.

On cherche maintenant l'ordonnée à l'origine p. Pour cela, on utilise le fait que $A \in (AB)$.

En effet, on sait donc que ses coordonnées vérifient l'équation de la droite (AB), ie

$$y_A = 2 \times x_A + p \iff 3 = 2 \times (-1) + p \iff 3 = -2 + p \iff p = 5$$

Finalement, on a $(AB) : y = 2x + 5$

Exercices du livre :

n° 1-2-7-9-10-12-20-21-22-23-24-26-27 p180

IV.4. Intersection de droites

Propriété 11 :
Soient deux droites d et d' d'équation $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.
Les coordonnées de leur point d'intersection vérifient alors les deux équations de droite.
Autrement dit, ce sont les solutions du système

$$\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$$

Exemple :
Soient $d : y = 2x - 3$ et $d' : y = -x + 3$. On voit de suite que $m \neq m'$ donc les droites ne sont pas parallèles. Elles se coupent alors en un point.
Pour trouver les coordonnées de ce point, on résout :

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

On en déduit $2x - 3 = -x + 3 \iff 3x = 6 \iff x = 2$.
Et comme $y = 2x - 3$ on trouve $y = 1$. Donc le point d'intersection de d et d' est le point de coordonnées $(2; 1)$

Remarques :

- On aurait tout aussi bien pu trouver y à partir de la deuxième équation.
- Lorsque les droites sont parallèles strictement, le système n'a pas de solution.
- Lorsque les droites sont confondues, le système a une infinité de solutions.

Exercices du livre :

n° 29-31-32-33-34 p 181