CHAPITRE 5

PROBABILITÉS

HORS SUJET

Document réalisé à l'aide de LaTeX

Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

TITRE : « Death Note »
AUTEUR : OBA ET OBATA
PRÉSENTATION SUCCINTE : *Death Note* est un manga de type shônen, créé par le scénariste Tsugumi Oba et le dessinateur Takeshi Obata. Il a été prépublié dans un journal de 2003 à 2006, et par la suite publiée en douze tankôbon de 2004 à 2006.

L'histoire est centrée sur *Raito Yagami*, un lycéen surdoué qui juge le monde actuel criminel et corrompu. Sa vie change du tout au tout le jour où il ramasse par hasard un mystérieux cahier intitulé « Death Note ». Ancienne propriété d'un dieu de la mort, le Death Note permet à son utilisateur de tuer toute personne dont il connaît le nom et le visage. Raito décide d'utiliser le Death Note pour exterminer les criminels, dans le but d'éradiquer le Mal et de bâtir un monde parfait dont il sera le dieu.

Mais les nombreuses morts inexpliquées de criminels à travers le monde attirent l'attention d'Interpol et du mystérieux *L*, un détective capable de résoudre n'importe quelle énigme, mais dont personne ne connaît ni le visage ni le nom. L décide d'enquêter pour capturer le tueur en série, surnommé par le grand public « Kira ». Entre Raito et L, tous deux persuadés d'agir pour la justice, s'engage un combat acharné pour découvrir en premier l'identité de l'autre...

Table des matières

L'essentiel :

- ⇝ Revoir le vocabulaire
- ⇝ Découvrir la notion d'intersection, de réunion, complémentaire
- ⇝ Modéliser une expérience aléatoire
- ⇝ Utiliser l'équiprobabilité
- ⇝ Manipuler les formules de réunion et complémentaire.

« Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée ! »

John Louis von Neumann

Chapitre 5 : Probabilités

Au fil du temps

Alors que les hommes se sont intéressés à la géométrie depuis la nuit des temps, et qu'une première présentation rigoureuse (les mathématiciens disent axiomatique) en a été proposée trois siècles avant JC par le grec Euclide, il a fallu attendre le XVI^e siècle pour qu'on s'intéresse enfin aux probabilités, et encore était-ce pour aider les princes à améliorer leurs gains au jeu.
Ainsi, le Grand Duc de Toscane demanda au vénérable Galilée pourquoi il était plus difficile d'obtenir 9 que 10 au jeu de passe-dix (jeu consistant à jeter 3 dés), même s'il n'y a dans les deux cas que 6 combinaisons pour les obtenir. La grande expérience du Duc en matière de jeu lui avait permis de remarquer ce phénomène, alors que théoriquement, « sur le papier » , il aurait dû y avoir la même fréquence d'apparition des deux nombres, puisqu'il y a dans chaque cas 6 manières de les obtenir.
Y aurait-il plusieurs réalités ?
Parmi toutes les définitions possibles du hasard, nous en retiendrons deux qui ont influencé la théorie des probabilités :

- pour certains, tout a une cause, et le hasard n'est le reflet que de l'ignorance que nous avons des lois de la Nature. Cet esprit souffla particulièrement au XVIII^e siècle au moment où Laplace posa les bases d'une première théorisation des probabilités. Les probabilités sont alors déterminées a priori, par des considérations non expérimentales. Par exemple, un dé a six faces, donc, on peut poser d'avance que l'événement « obtenir 5 » a une probabilité de 1/6. Cette symétrie, cette « géométrie du hasard » selon les termes de Pascal, permet de calculer sans ressentir le besoin de recourrir à l'expérience. Elle implique la notion centrale d'équiprobabilité : une probabilité est égale au rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles.
  Cette conception peut apparaître assez naïve : il est illusoire de penser qu'un dé puisse être parfaitement équilibré, mais doit-on être gêné pour autant ?
- pour d'autres, le hasard constitue notre univers, i.e qu'il n'est pas qu'une abstraction mathématiques mais une réalité physique. La théorie du chaos mise en forme par René Thom en 1955 montre en effet que dans certaines situations, on aura beau observer un phénomène pendant un temps très long, on ne pourra prévoir son évolution. De même en physique quantique, la connaissance du passé et du présent ne permettent pas de prévoir mieux des états possibles futurs.

Alors, le hasard, une réalité physique ou une invention mathématiques ? Au lieu de s'opposer, ces deux visions se complètent et il faut les avoir en tête. Ces deux notions ont en commun de postuler que l'issue de l'expérience (le jeter d'un dé) est indépendant de l'observateur. Ceci peut ne plus être vrai dans certains domaines, comme par exemple l'économie.

I) Modéliser une expérience aléatoire

Petits problèmes d'introduction

? Problème : Jeu du lièvre et de la tortue

Le jeu consiste à affronter un lièvre et une tortue pour parcourir un plateau de **6 cases**, selon les règles suivantes :

- On lance un dé équilibré à 6 faces,
- Si le 6 sort, le lièvre avance directement de 6 cases (et donc gagne) ;
- Sinon, la tortue avance d'**une** case.
- Le jeu continue jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant.

Quelle est la situation la plus enviable à votre avis, celle du lièvre ou de la tortue ?
A quel point ?

? Problème : Jeu des portes

Un jeu télévisé se déroule de la manière suivante : il y a trois portes, derrière l'une d'entre elles se trouve 10000€ et rien derrière les deux autres. Un candidat choisit au hasard l'une des trois. Ensuite le présentateur élimine une des deux mauvaises portes, tout en conservant celle choisie par le candidat. Le candidat peut alors conserver son choix ou le changer.
Que vaut-il mieux faire pour le candidat, changer ou conserver son choix ?
Quelles sont ses chances de gagner dans le premier cas, et dans le deuxième ?

Objectifs :

- Ce dernier problème est parfois déjà connu des élèves, même s'ils ne savent pas expliquer la réponse.
- Il fait référence aux probabilités conditionnelles, et teste là encore leur intuition.
- Les élèves peuvent commencer à mettre en place une stratégie de réponse, voire une modélisation ou une simulation.
- On peut amorcer un début de réponse, non formalisée. Pour cela, il semble jusdiscieux de proposer le même problème avec 100 portes.
  Le n° 62 p 260 du livre évoque ce même problème.
- Il est conseillé de simuler, au cours du chapitre, l'expérience sur Algobox ou sur tableur.

? Problème : Le problème du Duc de Toscane

A la cour de Florence au début du XVII^e siècle, de nombreux jeux de société étaient alors pratiqués. Parmi ceux-ci, l'un faisait intervenir la somme des numéros sortis lors du lancer de trois dés.
Le Duc de Toscane, qui avait sans doute observé un grand nombre de parties de ce jeu, avait constaté que la somme 10 était obtenue légèrement plus souvent que la somme 9 mais il ne comprenait pas pourquoi et exposa son problème à Galilée.
C'est le début de l'étude des probabilités et c'est pourquoi le vocabulaire fait parfois référence à celui des jeux.
Et vous, que pensez-vous de ce problème ?

? Problème : des Anniversaires

A votre avis, quelle est la probabilité que sur l'ensemble des élèves de seconde du lycée, deux personnes (non jumelles) aient leur anniversaire le même jour de l'année ?
Dans un groupe de 60 personnes ? Dans un groupe de 30 personnes ?
A votre avis, combien doit-on réunir de personnes pour avoir au moins une chance sur deux que deux personnes de ce groupe aient leur anniversaire le même jour de l'année ?

Objectifs :

- Etablir une discussion au sein de la classe et éveiller la curiosité
- Tester l'intuition des élèves sur la première question et voir leur niveau initial (comme il y a plus de 365 élèves en seconde,la probabilité est évidente)
- Leur faire remarquer que la probabilité est un nombre théorique entre 0 et 1, indépendant du résultat d'une expérience (en effet, la plupart répondront aux questions en fonction de leur expérience)
- Montrer aux élèves l'utilité de l'étude des probabilités grâce aux deuxième et troisième questions, non intuituves (en général, on pose des problèmes très simples aux élèves, dans lesquels la théorie ne s'avère pas nécessaire pour répondre).
  Les réponses à ces questions sont respectivement $\simeq 99\%$, $\simeq 70\%$.
- La quatrième question est simplement là pour compléter le problème.
  La réponse est 23 personnes.
- L'objectif n'est absolumment pas d'étudier ce problème, trop complexe en ce début de chapitre.

Le but de ce chapitre est de construire des modèles pour décrire les expériences aléatoires et les probabilités sur de leurs résultats possibles.
De telles expériences sont par exemple : la face obtenue en lançant une pièce de monnaie, le tirage du loto, etc...
Le besoin d'avoir une méthode systématique de description de telles expériences est justifié par le fait que certains résultats, qui nous sont parfois intuitivement évidents, et que nous n'arrivons pas toujours à expliquer sont en fait faux, comme en témoignent les deux premiers problèmes présentés.

De plus, lorsque l'expérience est un jeu, il est intéressant de connaître nos chances de gagner, et les risques de perdre que nous prenons, comme dans les deux jeux précédents.

I.1. Modéliser une expérience aléatoire

Travail de l'élève 1 : Un sac contient huit boules : 3 vertes (V), 2 bleues (B), 1 rouge (R) et 2 noires (N).
On tire une boule au hasard et on note sa couleur.
Compléter le tableau suivant, modélisant cette expérience :

Résultats	V				Total
Probabilités					

Définition 1.

Modéliser une expérience aléatoire, c'est décrire tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire et choisir leurs probabilités de réalisation afin de représenter au mieux la réalité.
On présente souvent les résultats dans un tableau :

- La première ligne contient les résultats possibles de l'expérience, appelées issues ou événements élémentaires
- la seconde leur probabilité correspondante : la somme doit faire 1.

Exercice du Cours : Modéliser l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux pièces de monnaie et regarder les faces obtenues (P ou F).

Remarque : Dans le jeu du Duc de Toscane, il est simple de voir que les résultats possibles sont les nombres entiers de 3 à 18. Cependant, pour déterminer la probabilité de chacune de ses sommes, il nous faut un peu plus de connaissances, d'où l'utilité de ce chapitre ...

Exercices du livre : Hyperbole

n°4 p 249

I.2. Vocabulaire

Définition 2.

Vocabulaire	Exemple	Exemple
Expérience aléatoire : Processus dont le résultat est incertain (mais dont on peut prévoir le type)	Lancer un dé cubique et on regarde le numéro obtenu	Lancer deux pièces de monnaie et on regarde les faces obtenues
Eventualité ou **Issue** : Résultat possible d'une expérience aléatoire	« Obtenir 6 », noté 6	« Obtenir deux fois Pile », noté PP
Univers : Ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire. On le note souvent Ω.	$\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$	$\Omega = \{PP;PF;FP;FF\}$ (on différencie les pièces)
Evénement : Ensemble d'issues de l'univers (partie ou sous ensemble de Ω)	$A =$ « Obtenir un numéro Pair », $A = \{2,4,6\}$	$B =$« Obtenir **au moins** une fois pile », $B = \{PP;PF;FP\}$

Remarques :

- On a parfois le choix dans la descrition d'un univers. Par exemple, pour les pièces, on aurait pu donner $\Omega = \{PP, FP, FF\}$. Dans ce cas, on aurait $A = \{PP, FP\}$ et $B = \{FP, FF\}$.

De même, on considère usuellement qu'il y a deux issues "PILE" et "FACE" pour chaque pièce, mais rien n'empêche d'en rajouter une troisième, par exemple "TRANCHE".
En général, l'énoncé précise l'univers le plus approprié pour l'étude qui en sera faite.
Quand l'énoncé ne précise rien, sachez que l'on considère tacitement que l'issue TRANCHE n'arrive jamais, donc on l'omet, et que l'on différencie toujours résultats de plusieurs pièces, dés ou autres, ceci afin de facilité l'étude probabiliste.

⇝ En classe de seconde l'ensemble Ω sera toujours un ensemble fini.
On ne considérera donc pas des expériences du type :

— « Choisir un nombre réel au hasard entre 0 et 1. », où l'univers est $\Omega = [0;1]$

— « On lance une pièce et on compte le nombre de lancés jusqu'au premier pile obtenu », où $\Omega = \mathbb{N}$.

Exercice du Cours : On lance deux dés à 6 faces et on regarde la somme des faces obtenues. Proposer deux univers possibles pour décrire cette expérience.

I.3. Loi de probabilité

Travail de l'élève 2 : Un sac rouge contient trois boules numérotées 1, 2 et 3.
Un sac bleu contient quatre boules numérotées 0, 1, 2 et 3.
On tire une boule dans chaque sac et on calcule la somme des deux numéros.

1. Compléter le tableau ci-contre.
2. En déduire l'univers Ω de cette expérience.
3. Déterminer la loi de probabilité de cette expérience sous forme d'un tableau.
4. Que vaut la somme des probabilités des issues ?
5. Quel est l'événement le plus probable :

   A : « Obtenir une somme supérieure ou égale à 5 »

   ou B : « Obtenir une somme supérieure ou égale à 2 » ?

Somme		Sac rouge		
		1	2	3
Sac Bleu	0			
	1			
	2			
	3			

Définition 3.

On considère une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{\omega_1;\omega_2;\dots;\omega_n\}$ (n éléments).
Définir une **loi de probabilité** P sur Ω c'est associer à chaque éventualité ω_i une probabilité p_i de sorte que

⇝ p_i soit un nombre réel dans $[0;1]$

⇝ $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

De plus, la probabilité d'un événement A, notée $P(A)$, doit être la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Remarques :

⇝ On a $P(\Omega) = 1$.

⇝ Par convention, on pose $P(\varnothing) = 0$.

⇝ Pour tout événement A, on a $0 \leq P(A) \leq 1$.

⇝ Il ne faut pas confondre un événement A qui est un ensemble d'issues de l'expérience et sa probabilité $P(A)$ qui est un nombre de l'intervalle $[0;1]$.

Exercice du Cours : Soit un dé truqué dont les probabilités des faces d'apparitions sont donnés par le tableau suivant :

Eventualité	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$0,05$	$0,05$	$0,1$	$0,1$	$0,2$	a

1. Calculer la probabilité de l'éventualité : « le dé tombe sur 6 ».
2. Calculer la probabilité de l'événement A =« obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 ».
3. Calculer la probabilité de l'événement B =« obtenir un nombre premier ».
4. Calculer la probabilité de l'événement C = « obtenir un nombre pair ».

Exercice 1 : On lance deux fois une pièce équilibrée. Décrire sous forme d'ensemble l'événement A : « obtenir une fois Pile et une fois Face » puis déterminer sa probabilité.

Exercice 2 : Une urne contient des boules rouges, vertes et noires. On ne connaît pas la composition exacte de l'urne. On tire une boule de l'urne et on observe sa couleur. On note :

- R l'événement : « obtenir une boule rouge ».
- V l'événement : « obtenir une boule verte ».
- N l'événement : « obtenir une boule noire ».

On sait que la probabilité d'obtenir une boule rouge est $\frac{1}{3}$ et la probabilité d'obtenir une boule verte est $\frac{1}{5}$.
Déterminer la probabilité d'obtenir une boule noire.

Exercice 3 : Dans un verger, on trouve deux fois plus de pommiers donnant des pommes rouges et que de pommiers donnant des pommes vertes (et c'est tout).
Déterminer la probabilité de choisir un pommier donnant des pommes vertes.
Coup de pouce *: On pourra noter p la probabilité de choisir un pommier donnant des pommes vertes.*

Exercice 4 : On lance deux dés cubiques équilibrés numérotés de 1 à 6 et on s'intéresse au plus grand des deux numéros sortis.
Utiliser un tableau à double-entrée pour préciser la loi de probabilité de cette expérience.
Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 3 ?

Exercice 5 : Une urne est composée de cinq jetons portant le numéro 5, quatre jetons portant le numéro 4, trois jetons portant le numéro 3, deux jetons portant le numéro 2 et un jeton portant le numéro 1.
On tire au hasard un jeton dans l'urne et on note son numéro n.

1. Préciser la loi de probabilité sur l'univers de cette expérience aléatoire.
2. Calculer la probabilité de chacun des événements :
   - A : « n est impair »
   - B : « $n \geq 3$ »

Exercice 6 :

1. On lance deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
   L'issue de l'expérience aléatoire est la distance entre les deux numéros obtenus : par exemple, lorsque les numéros 3 et 5 sortent, l'issue est 2.

a. Utiliser un tableau pour obtenir l'univers Ω de cette expérience.

b. Préciser la loi de probabilité sur Ω.

c. Déterminer la probabilité des événements suivants :

- A : « La distance est strictement supérieure à 2 »
- B : « La distance est comprise entre 2 et 5 »

2. Le joueur peut au choix :

- lancer un dé cubique équilibré ;
- lancer deux dés cubiques équilibrés et calculer la distance entre les deux numéros sortis.

Quel est le protocole le plus avantageux sachant que pour gagner, le joueur doit obtenir 3 ?

I.4. L'équiprobabilité

Définition 4.

Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité** ou encore que la loi de probabilité est **équirépartie**.

Proposition 1.

Lorsque la loi de probabilité est équirépartie, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éventualités favorables}}{\text{nombre d'éventualités possibles}}$$

Exercice du Cours : Dans un jeu de 32 cartes, déterminer la probabilité de piocher :

- le valet de coeur
- un valet
- un coeur

Exercices du livre : Hyperbole

n°13 p 249

II) Intersection, réunion et complémentaire

II.1. Vocabulaire et notations

Travail de l'élève 3 : On dispose de deux urnes 1 et 2 contenant 12 boules chacune.
L'urne 1 contient 6 boules rouges et 6 boules jaunes.
L'urne 2 contient 6 boules rouges, 4 boules bleues et 2 boules jaunes.
Un jeu consiste à choisir une première boule dans l'urne 1, puis une seconde boule dans l'urne 2.
On s'intéresse aux couleurs obtenues et on décrit les issues de ce jeu par un couple de couleurs (ordonnées).
Par exemple, le résultat $(\mathrm{J};\mathrm{R})$ *signifie que la première boule tirée est jaune, et que la seconde est rouge.*

1. Décrire l'issue $(\mathrm{R};\mathrm{B})$ par une phrase.
   $(\mathrm{R};\mathrm{B})$: « ...

2. Déterminer l'univers Ω de cette expérience.
   $\Omega = \Big\{ ...$

3. Donner les issues qui réalisent les événements suivants, en complétant ci-dessous :

   - ⇝ A= « obtenir une boule jaune au 1^{er} tirage » A=$\Big\{$...
   - ⇝ B= « obtenir une boule bleue exactement » B=$\Big\{$...
   - ⇝ C= « obtenir au moins une boule rouge » C=$\Big\{$...
   - ⇝ D= « obtenir au plus une boule rouge » D=$\Big\{$...
   - ⇝ E= « obtenir deux boules rouges » E=$\Big\{$...

4. **a.** Déterminer l'ensemble des issues de l'univers qui ne sont pas dans A, noté $\overline{\mathrm{A}}$ (se lit « A barre »).
   $\overline{\mathrm{A}} = \Big\{ ...$
   b. Décrire ce nouvel événement par une phrase.

   c. Décrire par une phrase l'événement $\overline{\mathrm{B}}$ puis l'événement $\overline{\mathrm{C}}$
   $\overline{\mathrm{B}}$: « ...

   $\overline{\mathrm{C}}$: « ...

5. **a.** Déterminer l'ensemble des issues de l'univers communes à A et B, noté A ∩ B (se lit « A inter B »)
   A∩ B = $\Big\{$
   b. Décrire ce nouvel événement par une phrase.

   c. Décrire par une phrase l'événement A ∩ D.
   A ∩ D : « ...

d. Déterminer l'ensemble des issues composant A ∩ E puis $A \cap \overline{A}$

e. Décrire par une phrase C ∩ E puis déterminer l'ensemble des issues composant cet événement.
C ∩ E : « ...

C ∩ E = $\{$...

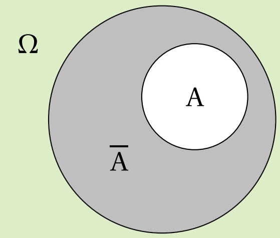
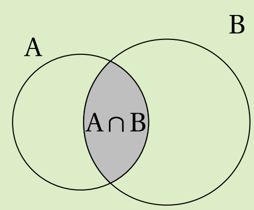
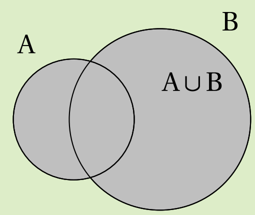
6. **a.** A votrer avis, comment traduire par une phrase l'événement A ∪ B ?

b. Déterminer l'ensemble des issues composant A ∪ B.

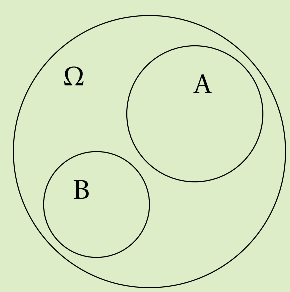
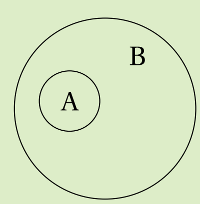
c. Déterminer l'ensemble des issues de $A \cup \overline{A}$

Définition 5.

Soient Ω un univers, et A et B des événements de Ω.

Notation	Vocabulaire	Définition	Illustration
$\overline{A}$ « A barre »	Evénement **complémentaire** de A ou encore Evénement **contraire** de A	Ensemble des issues de l'univers n'appartenant pas à A	
$A \cap B$ « A inter B »	**Intersection** de A et de B (se traduit dans une phrase en français par « **ET** »)	Ensemble des issues de l'univers **communes** à A et B donc celles qui réalisent **A et B**	
$A \cup B$ « A union B »	**Réunion** de A et B (se traduit dans une phrase en français par « **OU** »)	Ensemble des issues de l'univers qui sont dans **au moins l'un des événements A ou B** donc celles qui réalisent **A ou B ou les deux**	

Cas particuliers :

Notation	Vocabulaire	Conséquence(s)	Illustration
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont **disjoints** ou **incompatibles.**	On ne peut pas avoir les deux événements A et B en même temps.	
$A \subset B$ A **inclus** dans B	A est une **partie** de B, un **sous-ensemble** de B	⇝ Tous les éléments de A sont dans B ⇝ On ne peut donc pas avoir l'événement A sans l'événement B. ⇝ $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$	

Méthode

Pour déterminer :

- ⇝ l'univers d'une expérience aléatoire, on liste les issues possibles de l'expérience.
- ⇝ les issues qui réalisent un événement, on liste les issues qui respectent la condition définissant cet événement.
- ⇝ Pour déterminer l'**intersection** de deux événements, on fait la liste des issues **communes** aux événements.
- ⇝ Pour déterminer la **réunion** de deux événements A et B, on fait la liste des issues réalisant **soit** A**, soit** B **(soit les deux)**.

Exercice du Cours : Dans un groupe de 500 élèves, 350 pratiquent un sport et 200 font de la musique ; 100 élèves pratiquent les deux activités. On note S l'événement « l'élève fait un sport » et M l'événement « l'élève fait de la musique ».

1. Représenter la situation par un diagramme.
2. Décrire par une phrase de chacun des événements suivants :

$$S\cap M \qquad S\cup M \qquad \overline{S} \qquad \overline{M} \qquad \overline{S\cap M} \qquad \overline{S\cup M}$$

3. On choisit un élève au hasard. Déterminer la probabilité des événements S, M et de chacun des événements précédents.

Exercice 7 : On jette un dé dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on s'intéresse au numéro sur la face supérieure.

1. Définir l'univers Ω
2. Donner les issues qui réalisent les événements suivants :
   A : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 2 »
   B : « obtenir un numéro impair »
   C : « obtenir un numéro strictement supérieur à 4 »
3. Déterminer sous forme d'ensemble les événements suivants : $A\cap B$; $A\cup B$; $A\cap C$; $A\cup C$; $C\cap B$; $C\cup B$; $\overline{A}$; $\overline{A}\cup C$; $\overline{A}\cap C$
4. Parmi les événements précédents, citer deux événements incompatibles qui ne sont pas contraires l'un de l'autre.
5. Déterminer les probabilités de chacun des événements précédents ;

Exercice 8 : Une pièce a été falsifié. Quand on la lance, Pile apparaît 3 fois plus souvent que Face.
On note F l'événement : « Obtenir Face ».
Déterminer $\overline{F}$ puis déterminer sa probabilité $P(\overline{F})$.

Exercice 9 : Une urne contient deux jetons rouges marquées R_1 et R_2 et deux jetons jaunes marquées J_2 et J_3.
On tire au hasard un premier jeton dans l'urne, on le remet et on tire au hasard un deuxième jeton.
On note à chaque tirage la couleur et le numéro obtenu.

1. Quel est l'univers de cet expérience ? *On pourra s'aider d'un tableau à double-entrée*
2. Ecrire sous forme d'ensemble les événements suivants puis déterminer leur probabilité :
   - ⇝ A :« Obtenir deux jetons de même couleur ou de même numéro »
   - ⇝ B : « Obtenir deux jetons portant des numéros ayant un écart de 1 »
3. Déterminer sous forme d'ensemble les évènements $A\cap B$, $A\cup B$ et $\overline{A}$ puis déterminer leur probabilité.

II.2. Quelques propriétés

Travail de l'élève 4 : Dans un lycée, il y a 250 élèves qui font partie de l'association sportive : 120 élèves font partie de la section badminton, 90 de la section football et 50 élèves des deux sections.
On désigne au hasard un élève de l'association sportive, tous les élèves ayant la même chance d'être désignés.
On considère les événements suivants :

- B : « l'élève fait partie de la section badminton » ;
- F : « l'élève fait partie de la section football ».

1. Donner $p(\mathrm{B})$ et $p(\mathrm{F})$.
2. **a.** Déterminer $\mathrm{P}(\overleftarrow{\mathrm{B}})$, puis $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{F}}$.

   b. Que constatez-vous ?
3. En vous aidant d'un diagramme, déterminer le nombre d'élèves :
   - qui pratiquent uniquement du badminton ;
   - qui pratiquent uniquement du football ;
   - qui ne font ni du badminton, ni du football.
4. **a.** Définir par une phrase l'événement $\mathrm{B}\cap\mathrm{F}$, puis calculer $p(\mathrm{B}\cap\mathrm{F})$.

   b. Définir par une phrase l'événement $\mathrm{B}\cup\mathrm{F}$, puis calculer $p(\mathrm{B}\cup\mathrm{F})$.

   c. Calculer $p(\mathrm{B})+p(\mathrm{F})-p(\mathrm{B}\cap\mathrm{F})$. Que constate-t-on ?

Proposition 2.

Si deux événements sont incompatibles, alors la probabilité de leur réunion est égale à la somme de leurs probabilités :

$$\text{Si } \mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\varnothing \text{ alors } \mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})$$

Preuve

Si l'un des événements A et B est l'ensemble vide, alors la relation précédente est évidente.
Dans le cas contraire, $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ est la somme des probabilités des issues de A et $\mathrm{P}(\mathrm{B})$ est la somme des probabilités des issues de B. Puisque A et B sont disjoints, $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ contient exactement tous les éléments de A et tous ceux de B. Par conséquent $\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})$ est égal à la somme des probabilités des élements de $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$, i.e $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$

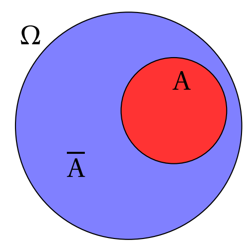
Corollaire 1.

- La probabilité de l'événement contraire $\overline{\mathrm{A}}$ de A est $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})=1-\mathrm{P}(\mathrm{A})$.
- Si $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$, alors $\mathrm{P}(\mathrm{A})\leq\mathrm{P}(\mathrm{B})$

Preuve

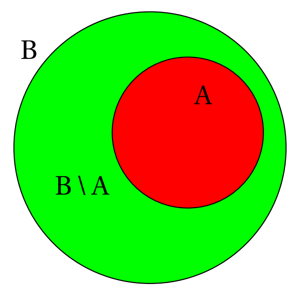
- Par définition, on a $\overline{\mathrm{A}}\cup\mathrm{A}=\Omega$ et $\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{A}=\varnothing$ (ie A et $\overline{\mathrm{A}}$ disjoints).
  Par conséquent d'après la propriété précédente :

  $$1=\mathrm{P}(\Omega)=\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}\cup\mathrm{A})=\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})+\mathrm{P}(\mathrm{A})\iff\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})=1-\mathrm{P}(\mathrm{A})$$



- Si $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$, alors $\mathrm{B}=\mathrm{A}\cup(\mathrm{B}\setminus\mathrm{A})$, (où $\mathrm{B}\setminus\mathrm{A}$ est l'ensemble des éventualités de B qui ne sont pas dans A.)
  Comme $\mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\setminus\mathrm{A})=\varnothing$ (ie A et $\mathrm{B}\setminus\mathrm{A}$ disjoints), d'après la propriété précédente on a :

  $$\mathrm{P}(\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{B}\setminus\mathrm{A})}_{\geq0}\Longrightarrow\mathrm{P}(\mathrm{A})\leq\mathrm{P}(\mathrm{B})$$



Exercice du Cours : On choisit une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes bien battu. F est l'événement : « la carte choisie est une figure » et T est l'événement : « la carte choisie est un trèfle ».

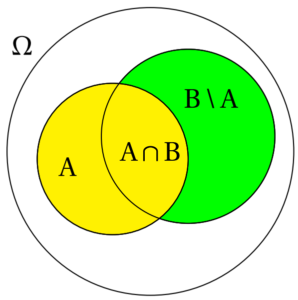
1. Donner $p(F)$ et $p(T)$.
2. Décrire par une phrase les événements $\overline{F}$ et $\overline{T}$ puis calculer $p(\overline{F})$ et $p(\overline{T})$.

Théorème 1.

La propabilité de la réunion de deux événements A et B est :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Preuve



Il suffit d'écrire que : $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$.
Comme $A \cup (B \setminus A) = \emptyset$, il vient :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$$

Or $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$. Donc

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exercice du Cours : On lance un dé équilibré à 20 faces numérotées de 1 à 20. On regarde le numéro de la face obtenue.
Soit A l'événement : « obtenir un nombre multiple de 5 » et B l'événement : « obtenir un nombre multiple de 3.

1. Déterminer $p(A)$ puis $p(B)$.
2. Décrire par une phrase $p(A \cap B)$ puis en déduire $p(A \cap B)$.
3. Décrire par une phrase $p(A \cup B)$ puis calculer $p(A \cup B)$.

Exercice 10 : Dans un club, plusieurs activités sont proposés dont le tir à l'arc et le golf. Parmi les 50 adhérents, 30 pratiquent le tir à l'arc, 18 le golf et 6 les deux sports. Quelle est la probabilité pour qu'un adhérent choisi au hasard :

1. pratique le tir à l'arc ? le golf ?
2. pratique l'un au moins des deux sports ?
3. ne pratique ni le tir à l'arc, ni le golf ?

Exercice 11 : Une urne contient des jetons de même forme, unicolores (rouge, vert ou noir) et marqués d'un numéro (1 ou 2). On choisit au hasard un jeton dans l'urne. Soit les événements :
R : « le jeton choisit est rouge » ; V : « le jeton choisi est vert »
N : « le jeton choisit porte le numéro 1 » et D : « le jeton choisit porte le numéro 2. »

1. On donne $p(R) = \frac{1}{4}$, $p(D) = \frac{1}{3}$ et $p(R \cup D) = \frac{1}{2}$; calculer la probabilité de choisir un jeton rouge portant le numéro 2.
2. On donne $p(V) = \frac{5}{12}$, $p(N) = \frac{5}{12}$ et $p(V \cap N) = \frac{1}{4}$; calculer la probabilité de choisir un jeton vert ou portant le numéro 1.
3. On donne $p(R) = \frac{1}{4}$ et $p(V) = \frac{5}{12}$.
   a. Décrire par une phrase l'événement $R \cup V$ puis calculer $p(R \cup V)$.

b. Décrire par une phrase l'événement $\overline{R \cup V}$ puis calculer $p(\overline{R \cup V})$.

Exercice 12 : On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On s'intéresse aux événements :

A : « Obtenir une couleur noire (trèfle ou pique) »

B : « Obtenir un trèfle »

C : « Obtenir un roi »

1. Que peut-on dire des événements A et B ?
2. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A B C A∩C A∪C B∩C B∪C A∩B A∪B

Exercice 13 : On lance deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On considère les événements A : « les deux numéros sont identiques » et B : « la somme des numéros est strictement supérieure à 7 ».

1. Déterminer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.
On pourra s'aider d'un tableau à double-entrée.
2. En déduire $P(A \cup B)$.

Exercice 14 : **Vrai ou Faux**

On lance deux dés tétraèdriques (en forme de pyramide régulière à base triangulaire) équilibrés dont les faces sont numérotées 1, 1, 2 et 2 pour l'un et 5, 10, 15, 20 pour l'autre.
On calcule la somme des numéros sur les six faces visibles et on note Ω l'univers de cette expérience.

1. $\Omega = \left\{34;35;39;40;44;45;49;50\right\}$
2. La loi de probabilité sur Ω est équirépartie.
3. Les événements D : « La somme est paire » et R : « La somme est divisible par 11 » sont incompatibles.
4. L'événement D et l'événement Z : « La somme est un multiple de 3 » sont contraires.

Exercice 15 : **Vrai ou faux**

1. Dans une loterie, un billet sur deux est gagnant. Marine achète deux billets.
Ainsi, est-elle sûre de gagner ?
2. Dans une classe de Seconde de 32 élèves, 18 aiment le cinéma, 14 la lecture.
Ainsi, tout élève aime le cinéma ou la lecture ?
3. On lance deux pièces de monnaie.
La probabilité de n'obtenir aucun Pile est $\frac{1}{3}$?
4. **Quand une expérience n'a que deux issues possibles, la probabilité de chacune est $\frac{1}{2}$?**
5. A et B sont deux événements.
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)$ **?**

Exercice 16 : Dans une urne sont placés 100 jetons numérotés de 0 à 99.
On tire un jeton au hasard et on lit le numéro obtenu.
On appelle A l'événement « le chiffre 9 n'apparaît pas dans le numéro »

1. Définir $\overline{A}$ par une phrase et déterminer sa probabilité.

2. En déduire la probabilité de l'événement A.

Exercice 17 : Norbert colorie au hasard chacune des faces d'un cube ABCDEFGH, soit en rouge, soit en vert.

1. Quel est le nombre total de coloriages possibles ?
2. On note U l'événement « le cube est colorié des deux couleurs »
   Décrire $\overline{\mathrm{U}}$ par un phrase et indiquer sa probabilité.
3. En déduire la probabilité de U.

Exercices du livre : Hyperbole

n° $19-23$ p 250 (applications)

n° **38 + 40** p 252 (tableaux) n° 42 à 44 p 255 (logique) nº 52 p 257

III) Simulations et probabilités

III.1. Choisir un modèle

Depuis le début de ce chapitre, l'énoncé des problèmes était suffisament clair et détaillé pour choisir une loi de probabilité crédible au regard des expériences aléatoires que l'on a étudié. Mais ce n'est pas toujours le cas.
Dans la vie, les statisticiens se retrouvent plutôt à observer les résultats d'expériences aléatoires puis choisir un modèle convenable, pour pouvoir ensuite faire des prévisions, ie des probabilités.

Dans cette partie, nous allons donc voir comment ils vérifient la crédibilité de leurs modèles, dans des cas simples.

Tout au long du chapitre, les séances de modules ont été réservés à simuler des expériences aléatoires.
Notamment, les élèves ont déjà simulé le jeu du passe-10 sur tableur et algobox (TP tableur : Transmath p 158 + n° 70 p 165 pour la théorie, idée présentée à l'oral).

III.2. Echantillonnage

Définition 6 :

Un échantillon de taille n est la liste de n résultats obtenus par n répétitions indépendantes de la même expérience.

Exemples :

- Lancer $10\,000$ fois trois dés et noter la liste des sommes obtenues, comme le Duc de Toscane.
- Faire $2\,454$ parties du jeu du lièvre et de la tortue et regarder qui gagne.
- Lancer 50 fois une pièce de monnaie et regarder la face obtenue.

Ces trois situations permettent de constituer à chaque fois un échantillon de taille $10\,000$, $2\,454$ et 50.

Remarques :

- Evidemment, les distributions des fréquences observées varient d'un échantillon à l'autre. Ce phénomène s'appelle la **fluctuation d'échantillonnage**.
- Lorsque la taille d'un échantillon augmente, la fluctuation est plus faible en proportion et la distribution des fréquences tend à se rapprocher d'une distribution théorique.

Définition 7 :

On appelle **épreuve de Bernoulli** une expérience qui n'a que deux issues possibles.

Exemples :

- Gagner ou perdre
- Obtenir Pile ou Face
- Répondre oui ou non aux questionx du Duc : « Il y a autant de chances de faire 10 que 9 avec trois dés équilibrés », « La probabilité de faire 9 avec trois dés vaut $\frac{6}{56}$ », ou encore, comme nous le pensons nous « La probabilité de faire 9 avec trois dés vaut $\frac{25}{216}$ »...

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fréquences observées pour certaines expériences de Bernoulli (simulées sur ordinateur, car plus rapide qu'à la main), afin d'estimer certaines proportions p d'un caractère dans une population, ou encore d'estimer la probabilité p de gagner (ou perdre) dans un modèle de Bernoulli.

Exemple :
On dispose d'une pièce de monnaie et on souhaite savoir si elle est bien équilibrée.
On la lance 50 fois (à la main, plus devient fastifieux). On a obtenu 30 Fois pile et 20 fois Face.
Notre échantillon est de taille 50 et nous avons observé une fréquence d'apparition de « Pile » qui vaut $f_P = \frac{3}{5} = 0.6$ et une fréquence d'apparition de « Face » qui vaut $f_F = \frac{2}{5} = 0.4$.
Peut-on raisonnablement estimer que la pièce est équilibrée et qu'il s'agit simplement de la fluctuation d'échantillonnage ?

Remarque : En fait, on ne peut jamais être sûr de rien, mais d'un point de vue statistique, on peut avoir une idée de la réponse, avec une certaine marge d'erreur.

III.3. Intervalle de fluctuation

Travail de l'élève **5.** Le jeu du lièvre et de la tortue (n°60 p 259).
Le jeu consiste à affronter un lièvre et une tortue pour parcourir un plateau de 6 cases, selon les règles suivantes :

- On lance un dé équilibré à 6 faces,
- Si le 6 sort, le lièvre avance directement de 6 cases (et donc gagne) ;
- Sinon, la tortue avance d'une case.
- Le jeu continue jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant.

1. Quelle est la situation la plus enviable, celle du lièvre ou de la tortue ?
2. On appelle p la probabilité de gagner du lièvre. Conjecturer la valeur de p.
3. Simuler ce jeu sur Algobox, avec en affichage la fréquence de gain du lièvre.
   On commencera par demander à l'utilisateur le nombre de parties qu'il souhaite faire.
4. Les résultats de la simulation pour 50 expériences vous semblent-ils en accord avec votre conjecture ? Pour 100 ? 10 000 ?
5. Les statisticiens ont établi le résultat suivant :
   Il y a environ 95% de chance que la fréquence observée soit comprise dans l'intervalle $\mathrm{I} = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
   a. Pour $n = 50$ et la valeur de votre p, déterminer l'intervalle I.
      Peut-on conclure que votre conjecture pour p est bonne ?
   b. Reprendre la question 3.a. pour $n = 100$, puis pour $n = 10\,000$.
6. Trouver la probabilité théorique de gain de lièvre, grâce à un arbre de probabilité contenant les événements 6 et $\overline{6}$.
7. Vérifier que la fréquence que vous avez observée se situe bien dans l'intervalle I pour $n = 10\,000$ et la vraie valeur de p.

On étudie un échantillon d'épreuves de Bernoulli et on s'intéresse à l'une des deux issues (par exemple, obtenir pile dans un tirage de pile ou face). On note p la probabilité qu'elle se réalise.

Théorème 2 :
Si on analyse un grand nombre d'échantillons de taille n ($n \geq 25$) et que l'on observe à chaque fois la fréquence d'apparition f de l'issue choisie, on s'aperçoit que pour une probabilité p comprise entre $0,2$ et $0,8$, au moins 95% des fréquences se situent dans un intervalle $\mathrm{I} = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ appelé **intervalle de fluctuation** des fréquences au seuil de 95%.

Prendre une décision à partir d'un échantillon
Pour apprécier si une fréquence observée f sur un échantillon de taille n est compatible avec un modèle de Bernoulli de probabilité p, on teste l'appartenance de la fréquence observée f à l'intervalle de fluctuation I.
Si f n'est pas dans l'intervalle I, alors on peut rejeter l'hypothèse que l'échantillon soit compatible avec le modèle.
Sinon, on ne peut pas conclure car on ne peut pas rejeter l'hypothèse que l'échantillon soit compatible avec le modèle (et on ne peut pas non plus affirmer que l'échantillon suit le modèle).

Remarque : Quelle que soit la décision prise, il y a toujours un risque que ce ne soit pas la bonne décision dans 5% des cas.

Exemple :

Dans l'exemple précédent de la pièce de monnnaie, on a $n = 50$ et on suppose $p = \frac{1}{2}$.
On calcule $p - \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,5 - \frac{1}{\sqrt{50}} \simeq 0,36$ et $p + \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{50}} \simeq 0,64$.
L'intervalle de fluctuation est alors $\mathrm{I} \simeq [0.36; 0.64]$.
Le théorème précédent assure que si on effectue la même expérience avec une pièce qui est parfaitement équilibrée alors, dans au moins 95% des cas, on observa une fréquence de pile comprise $0,36$ et $0,64$.
Notre observation est donc « fréquente » pour une pièce bien équilibrée, par conséquent on n'a aucune raison de refuser l'hypothèse « la pièce est bien équilibrée. »

Contre-Exemple :

Peut-on appliquer ce théorème et notre simulation pour répondre au Duc de Toscane et lui dire s'il a raison ou tort de considérer que $P(9) = \frac{6}{56}$?

Exercice 18 :

Au casino Belle-vue, sur 2500 lancés de dés, 1150 ont donné un nombre pair. Il y a lieu de faire une enquête pour utilisation de dés truqués ?

Même question pour un autre casino, où 1200 lancés ont donné un nombre pair.

Exercice 19 :

On a vendu à un grossiste $50\,000$ appareils électroniques en certifiant qu'au moins 80% ne présentent aucun défaut de fonctionnement. En prélevant 250 appareils au hasard et en les testant, on s'aperçoit que seulement 74% n'ont pas de défaut de fonctionnement.

Peut-on penser que le grossiste a été trompé ?

Même question pour un échantillon de 300 appareils.

Exercice 20 :

Dans une commune de plus de 50000 habitants, la proportion de femmes est $0,5$. Le conseil municipal est composé de 43 personnes dont 17 femmes.

Peut-on affirmer qu'au conseil municipal, la parité des sexes n'est pas respectée ?

Exercice 21 :

Dans une population de truites de rivière, le sex ration (proportion de mâles et de femelles) est de $0,5$ pour chaque sexe. Certaines pollutions par des produits pharmaceutiques modifient ce sex ration en augmentant la proportion de femelles. Sur un prélèvement de 100 truites de rivière, on a relevé une fréquence de femelles égale à $0,64$.

Peut-on considérer que cela est dû au seul hasard ou bien doit-on suspecter une pollution ?

Exercice 22 :

Lors d'un sondage effectué auprès de 900 personnes, 51% d'entre elles déclarent vouloir voter pour le candidat A. En supposant que les personnes sondées ont répondu sincèrement et qu'elles ne changeront pas d'avis le jour du vote, le candidat A peut-il raisonnablement penser qu'il sera élu au premier tout (c'est-à-dire avec plus de 50% des voix) ?

III.4. TPs Tableur

Problème 1

Dans la ville imaginaire de Sir (issue d'un roman de Diane Meur, « les villes de la plaine ») on a observé que les familles avaient toutes un, deux ou trois enfants. On souhaite savoir quelle la probabilité qu'une famille croisée au hasard ait un, deux ou trois enfants dans cette population.

On a retrouvé l'algorithme d'un ingénieur siriote, qui connaissait la réponse à la question précédente. Par chance on parvient à faire fonctionner son algorithme sur un ordinateur, par contre on a réussi à le décrypter qu'en partie.

Voici l'algorithme :

```
VARIABLES
  compteur1 EST_DU_TYPE NOMBRE
  compteur2 EST_DU_TYPE NOMBRE
  compteur3 EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  POUR i ALLANT_DE 1 A 1000
    DEBUT_POUR
    n PREND_LA_VALEUR un nombre entier au hasard entre ? et ?
    SI (impossible à décrypter) ALORS
      DEBUT_SI
      compteur1 PREND_LA_VALEUR compteur1+1
      FIN_SI
    SI (impossible à décrypter) ALORS
      DEBUT_SI
      compteur2 PREND_LA_VALEUR compteur2+1
      FIN_SI
    SI (impossible à décrypter) ALORS
      DEBUT_SI
      compteur3 PREND_LA_VALEUR compteur3+1
      FIN_SI
    FIN_POUR
  AFFICHER "Si on croise 1000 familles alors :"
  AFFICHER compteur1
  AFFICHER " familles ont exactement 1 enfant"
  AFFICHER compteur2
  AFFICHER " familles ont exactement 2 enfants"
  AFFICHER compteur3
  AFFICHER " familles ont exactement 3 enfants"
FIN_ALGORITHME
```

1. Formuler une hypothèse (en observant les résultats obtenus en exécutant ce programme) sur les probabilités que les familles de Sir aient un, deux ou trois enfants. Pour cela, compléter le tableau suivant :

Enfants par famille	1	2	3	Total
Probabilités théoriques (hypothèse)				

2. Le résultat d'une simulation est le suivant : Si on croise 1000 familles alors :
450 familles ont exactement 1 enfant
325 familles ont exactement 2 enfants
225 familles ont exactement 3 enfants.
Pensez-vous que les écarts entre les fréquences observées dans cette simulation et les probabilités théoriques (i.e vos hypothèses) s'expliquent par la seule fluctuation d'échantillonage due au hasard ? Êtes-vous sûr d'avoir raison ?

3. Ecrire un programme sur algobox similaire à celui qui est donné avec vos hypothèses.

4. Observer les résultats de vos simulations avec les résultats de simulations effectuées avec l'ordinateur du professeur. Commenter.

5. Le professeur révèle le programme original, ou pas.

Problème 2

Simuler le lancé de deux pièces de monnaie.

En lançant deux pièces de monnaie correctement équilibrées, on peut obtenir :

- ⇝ Deux côtés Pile
- ⇝ Deux côtés Face
- ⇝ Un côté Pile et l'autre Face

Norbert émet l'hypothèse qu'en effectuant un grand nombre de fois l'expérience, la fréquence d'obtenir deux côtés Pile est proche de $\frac{1}{3}$.

On souhaite simuler cette expérience à l'aide d'un tableur et vérifier si l'hypothèse semble correcte ou si elle doit être rejetée.

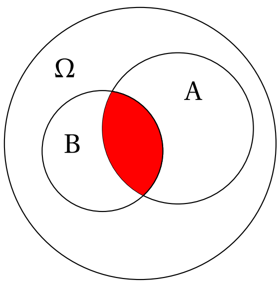
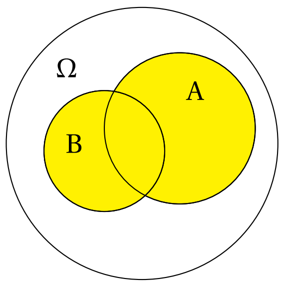
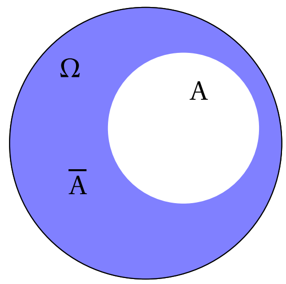
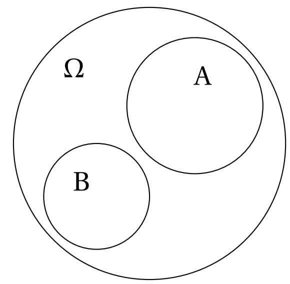
1. **a.** Reproduire la feuille de calcul ci-dessous :
   b. Ecrire une instruction qui donne un nombre aléatoire qui vaut 0 ou 1.
   c. Quelle instruction permet d'obtenir la somme des nombres situés dans les cellules $\mathrm{A2}$ et $\mathrm{B2}$?
   d. Ecrire une instruction qui permet d'avoir le nombre de cellules de contenu égal à 0 dans la plage $\mathrm{C1}$ à $\mathrm{C100}$, dans la plage $\mathrm{C1}$ à $\mathrm{C500}$ et dans la plage $\mathrm{C1}$ à $\mathrm{C1000}$.
2. Pour effectuer la simulation, on assimile le côté Pile au nombre 0 et le côté Face au nombre 1.
   a. A quelle somme correspond « Obtenir deux côtés Pile » ?
   b. Mettre en place une feuille de calcul comme celle représentée par l'enseignant avec :
   - ⇝ Dans les colonnes A et B et sur $1\,000$ lignes, des nombres aléatoires 0 ou 1
   - ⇝ Dans la colonne C, la somme par les ligne des colonnes A et B
   - ⇝ Dans les cellules $\mathrm{E2}$, $\mathrm{F2}$ et $\mathrm{G2}$, le nombre de fois où le nombre 2 figure dans les 100, 500 ou $1\,000$ premières lignes de la colonne C
   - ⇝ Dans les cellules $\mathrm{E3}$, $\mathrm{F3}$ et $\mathrm{G3}$, les fréquences correspondantes.
3. Les statisticiens ont établi le résultat suivant :
   Il y a environ 95% de chance que la fréquence observée soit comprise dans l'intervalle $\mathrm{I} = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

   a. Pour $n = 100$, déterminer l'intervalle I.
   Peut-on conclure que la conjecture de Pierre $p = \frac{1}{3}$ est bonne ?
   b. Reprendre la question 3.a. pour $n = 500$, puis pour $n = 1\,000$.

Exercices du livre :

Pour aller plus loin : simuler le jeu des portes sur Tableur ou/et Algobox (n°62 p 260)

IV) En bref

$A \cap B$	$A \cup B$	$\overline{A}$	$A \cap B = \emptyset$
Intersection de A **et** B **:** Eléments communs de A et B	**Réunion de** A **et** B **:** Eléments de A ou B (voire les deux)	**Complémentaire de** A **:** Eléments de Ω non dans A	A **et** B **sont disjoints** : Aucun élément commun à A et B
			

Pour déterminer :

- ⇝ l'univers d'une expérience aléatoire, on liste les issues possibles de l'expérience.
- ⇝ les issues qui réalisent un événement, on liste les issues qui respectent la condition définissant cet événement.
- ⇝ l'intersection de deux événements, on fait la liste des issues communes aux événements.
- ⇝ la réunion de deux événements A et B, on fait la liste des issues réalisant soit A, soit B (soit les deux).

« La physique est bien trop dure pour les phycisiens »

DAVID HILBERT, mathématicien