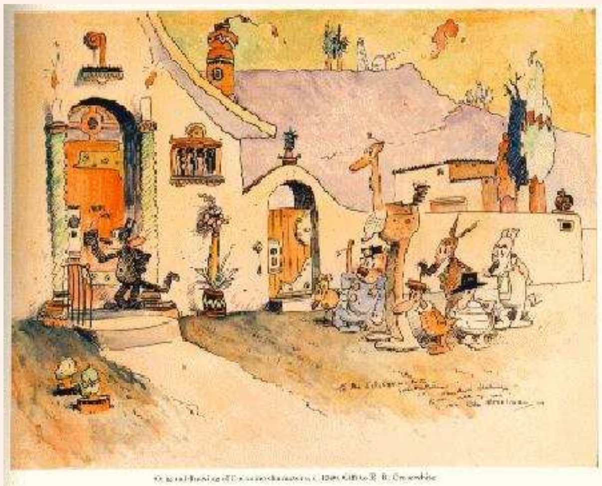
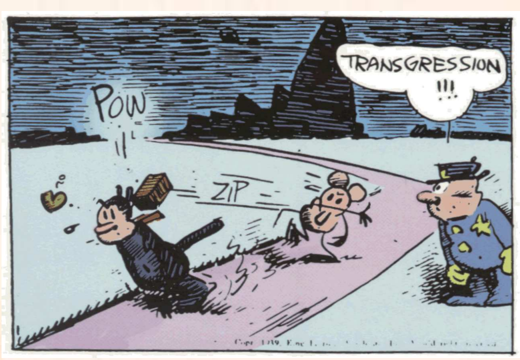
Chapitre 4

Lectures graphiques plus ou moins intelligentes



Hors Sujet



Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

Titre : « Krazy Kat »
Auteur : George Herriman
Présentation succinte : Krazy Kat est un comic strip américain créé par George Herriman et publié dans les journaux du pays, entre 1913 et 1944. La première publication se fit dans le New York Evening Journal. La série mêle surréalisme, poésie insouciance enjouée, ce qui en a fait l'une des BD préférées des passionnés et des critiques depuis plus de 80 ans. Les strips sont centrés sur une relation triangulaire entre son personnage éponyme, un chat innocent et désinvolte de sexe indéterminé (mais le plus souvent considéré comme une femelle), son antagoniste Ignatz Mouse, et le sergent Pupp (Officer Pupp), officier de police. Krazy est transi d'amour pour Ignatz mais celui-ci le méprise, et passe son temps à chercher à lui lancer une brique à la tête. Ce que Krazy interprète comme une preuve d'amour… Pupp, en tant que garant de l'ordre de la région de Coconino, fait tout pour empêcher Ignatz d'arriver à son but et enferme bien souvent la souris en prison.

En dépit de la simplicité de l'intrigue, la créativité verbale et visuelle d'Herriman, fait de Krazy Kat l'une des premières bandes dessinées à avoir été considérée comme de l'art par les intellectuels. Gilbert Seldes, célèbre critique d'art de l'époque, écrivit en 1924 qualifia le strip de « travail artistique le plus amusant, fantastique et satisfaisant de l'Amérique contemporaine ». Le poète renommé E. E. Cummings, autre admirateur de George Herriman, écrivit l'introduction du premier album de Krazy Kat. Plus récemment, beaucoup de scénaristes et dessinateurs constatent que le strip a eu une influence majeure sur leurs œuvres.

Table des matières

L'ESSENTIEL :

- ⇝ Lire des images, des antécédents et des ensembles de définition sur une courbe représentative
- ⇝ Résoudre des équations et des inéquations graphiquement
- ⇝ Vérifier par le calcul des solutions trouvées graphiquement
- ⇝ Retrouver par le calcul certaines solutions
- ⇝ Dresser graphiquement des tableaux de signes
- ⇝ Etablir des tableaux de signes par le calcul

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

Chapitre 4:

Lectures graphiques plus ou moins intelligentes

Au fil du temps

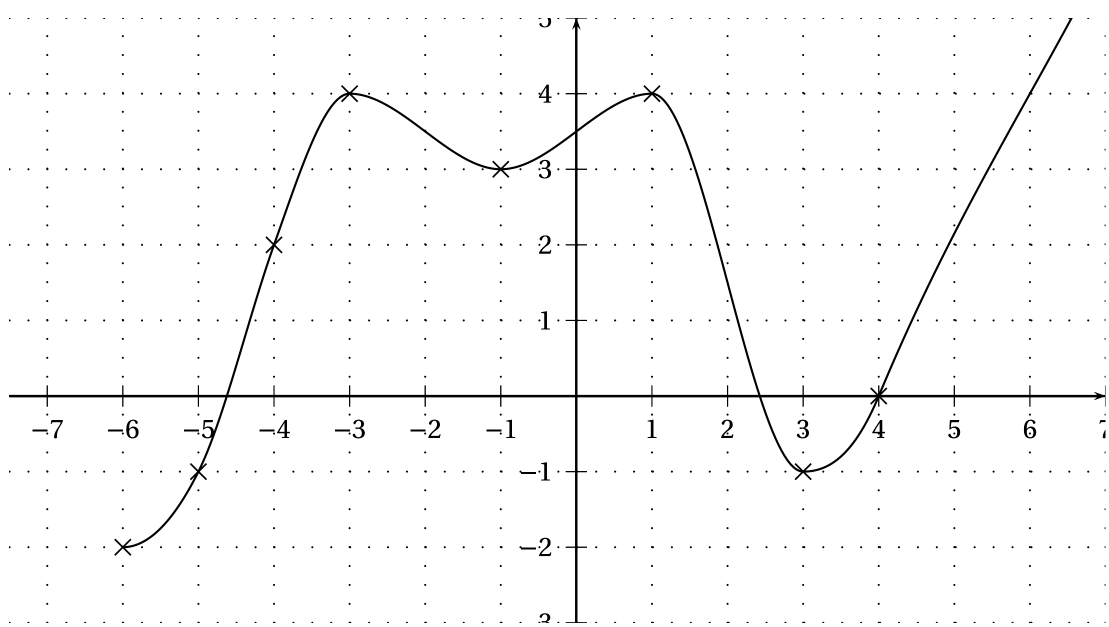
L'objectif principal de ce chapitre est de maîtriser la lecture graphique des courbes représentatives de fonctions, sous (presque) toutes les coutures.
Nous allons donc revoir les lectures d'images, d'antécédents et d'ensemble de définition, mais également apprendre résoudre graphiquement des équations, des inéquations, et à donner graphiquement le signe d'une fonction.
Cependant, nous verrons qu'avec un peu d'intelligence, on peut répondre exactement et simplement à des questions de lecture graphique.

Tout au long du chapitre, on peut faire des exercices de révision sur le développement et la factorisation. Voir la fiche révision ou encore les exercices n° 18 à 27 p 48 + nº 44 p 52

I) Lecture graphique

I.1. Images, antécédents et ensemble de définition

Travail de l'élève 1 : La courbe ci-dessous représente une fonction f.



1. Lire graphiquement l'ensemble de définition de f.

2. Lire graphiquement lorsque c'est possible les images par f de :

$$-5 \qquad 6 \qquad -7 \qquad 7 \qquad -2 \qquad 2$$

3. Lire graphiquement les valeurs suivantes :

$$f(4) \qquad f(3) \qquad f(0) \qquad f(-1) \qquad f(-3)$$

4. Résoudre graphiquement les équations :

$$f(x)=4 \qquad f(x)=3 \qquad f(x)=0 \qquad f(x)=-1 \qquad f(x)=-3$$

5. Résoudre graphiquement les inéquations :

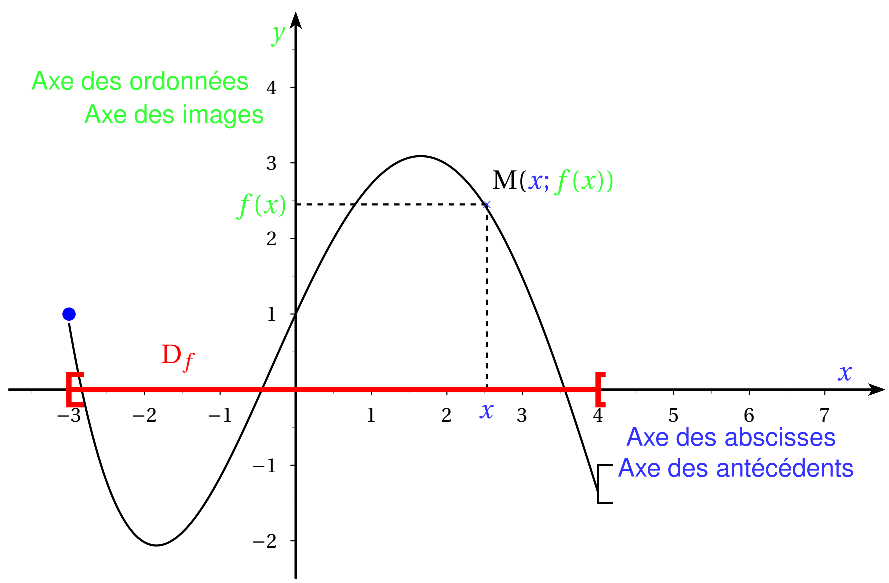
$$f(x)\geq 4 \qquad f(x)>3 \qquad f(x)\leq 0 \qquad f(x)<-1 \qquad f(x)>-3 \qquad f(x)<-3$$

Rajouter éventuellement des questions de signes, inéquations, extrema ...

Méthodes pour déterminer graphiquement

- **Un ensemble de définition** : On détermine l'ensemble des abscisses de tous les points de la courbe représentative. Puis on le décrit sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles, en faisant attention aux bornes (crochets ouverts ou fermés).
- **L'image $f(a)$ d'un réel a** : On place sur la courbe le point d'abscisse a et on lit son ordonnée.
- **Les éventuels antécédents d'un réel b** : On place sur la courbe tous les points éventuels d'ordonnées b (on peut les mettre en évidence en traçant la droite parallèle à l'axe des abcisses passant par le point $(0;b)$ d'équation $y=b$) et on lit leur abscisses.

Illustration :



Exercice du Cours : On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{3x+1}{2x+4}$

1. Tracer sur votre calculatrice la courbe représentative de la fonction f.

2. Lire son ensemble de définition.

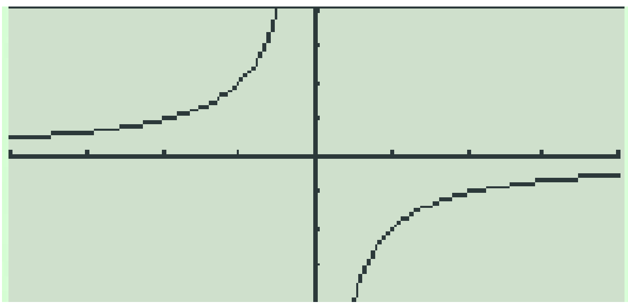
3. Lire l'image de 4.

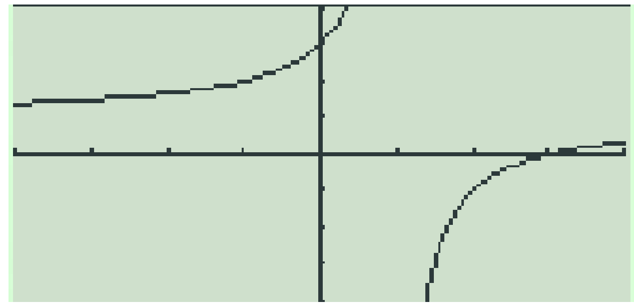
4. Lire $f(-3)$.

5. Déterminer graphiquement les éventuels antécédents de 1.
6. Résoudre graphiquement $f(x) \geq 1$
7. Résoudre graphiquement $f(x) = 0$
8. Donner graphiquement le signe de $f(x)$ en fonction de x.

Exercice 1 : Fabrice et Loïc ont voulu tracer sur leur calculatrice la courbe représentative de la fonction

$$f : x \longmapsto 1 - \frac{2}{x-1}$$

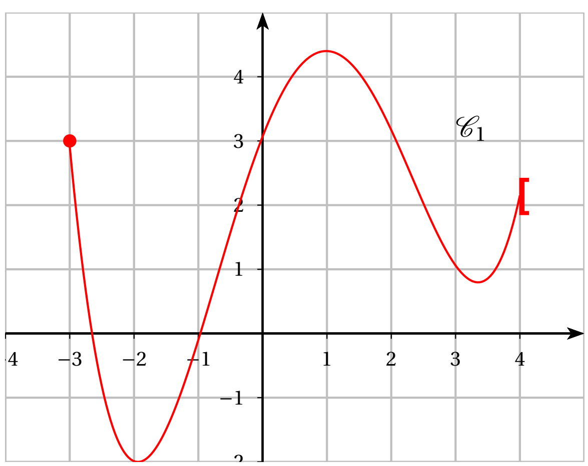


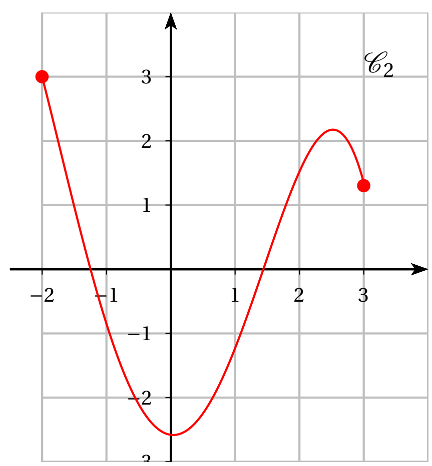


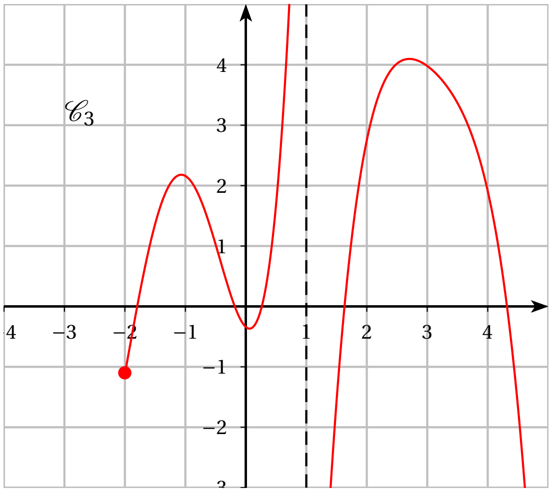
Loïc affirme l'ensemble de définition de f est $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ mais Fabrice, lui, pense que c'est $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

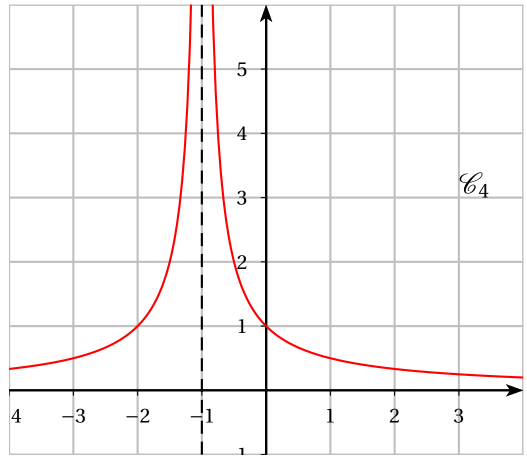
1. Quelle est la courbe tracée par Loïc ? par Fabrice ?
2. Quel argument algébrique Loïc peut-il utiliser afin de convaincre Fabrice ?
3. Quelle erreur Fabrice a-t-il commise ?

Exercice 2 : On donne les courbes $\mathscr{C}_1$ à $\mathscr{C}_4$ suivantes :









Pour chaque courbe, lire l'ensemble de définition de la fonction correspondante.

Exercice 3 : f est la fonction définie sur $[-4;6]$ par $f(x) = x^2 + 2x - 4$

1. Faire afficher à la calculatrice la courbe représentative de f sur $[-4;6]$
2. Donner deux antécédents de -1 par f.
3. Faire afficher à la calculatrice une table de valeurs de $f(x)$ pour x allant de -4 à 6 avec un pas de 1.
4. Vérifier votre réponse précédente à l'aide de ce tableau de valeurs.

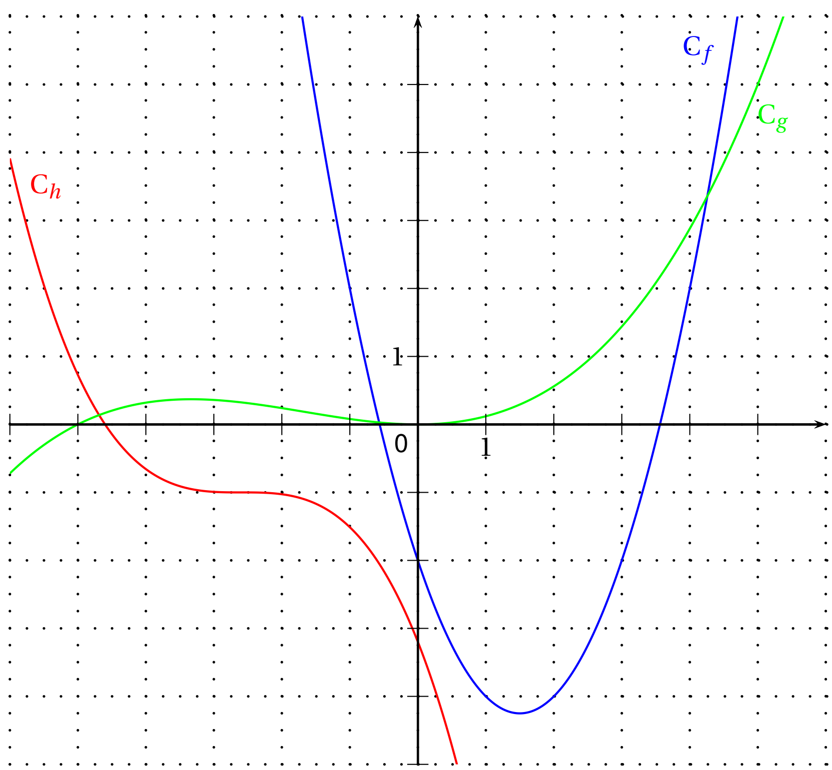
Exercice(s) du livre :
Hyperbole : n° 16 à 17 p 46 (classiques) + nº 54-57 p 54

Approfondissement possible : établir graphiquement le signe d'une fonction, réfléchir à la cohérence entre un tableau (de valeurs ou de signe) et une courbe représentative...

I.2. Résoudre des équations ou des inéquations graphiquement

Travail de l'élève 2 : Soient f, g et h trois fonctions définies par le graphique ci-contre :
Résoudre graphiqement :

1. $f(x) = -2$ S = ...
2. $g(x) = 0$ S = ...
3. $h(x) = 1$ S = ...
4. $f(x) = g(x)$ S = ...
5. $f(x) = h(x)$ S = ...
6. $g(x) = h(x)$ S = ...
7. $f(x) < -2$ S = ...
8. $g(x) \geq 0$ S = ...
9. $f(x) \geq h(x)$ S = ...
10. $f(x) < h(x)$ S = ...



Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle I, $k \in \mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives.

Résoudre graphiquement

Dans tous les cas, on suppose que l'on a déjà tracer les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur I.

- $\boxed{f(x) = g(x)}$ Les solutions sont les **abscisses** des éventuels points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
  L'ensemble des solutions est une liste de nombres, on le note avec des **accolades**.
- $\boxed{f(x) \leq g(x)}$ Les solutions sont les **abscisses** des éventuels points de C_f situés **au-dessous** de C_g.
  L'ensemble des solutions est un intervalle ou une réunion d'intervalle, on le note avec des crochets (ouverts si l'inégalité est stricte).

Remarques :

- Lorsque g est une fonction constante égale à un nombre réel k, sa courbe représentative est la droite horizontale d'équation $y = k$.
- Résoudre l'équation $f(x) = k$ revient alors à trouver graphiquement tous les antécédents de k appartenant à I
- Il existe diverses manières de poser la même question :

Langage des fonctions	Langage algébrique	Langage lié au graphique
Déterminer l'image de 3 par f	Calculer $f(3)$	Quelle est l'ordonnée du point d'abscisse 3 de la courbe $\mathscr{C}_f$?
Déterminer les éventuels antécédents de 3 par f	Résoudre l'équation $f(x) = 3$	Quelle sont les abscisses des éventuels points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite d'équation $y = 3$?
	Résoudre l'équation $f(x) > 3$	Quelles sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés au-dessus de la droite d'équation $y = 3$?

Exemple :

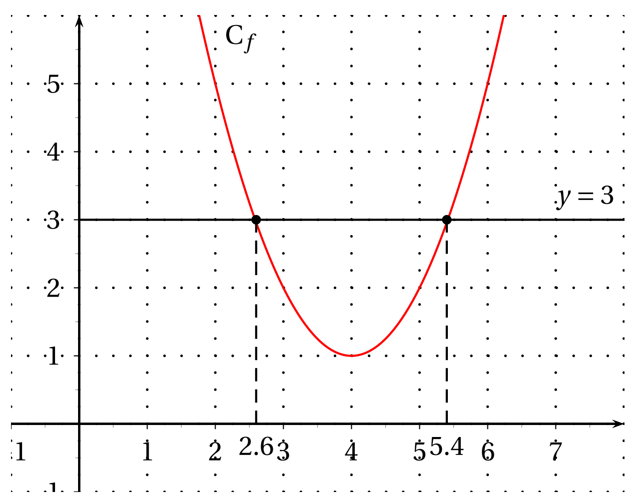
Résoudre graphiquement sur $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

$$(x-4)^2+1=3 \qquad (x-4)^2+1<3 \qquad (x-4)^2+1 \leq 3$$

$$(x-4)^2+1>3 \qquad (x-4)^2+1 \geq 3$$

On trace la courbe représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-4)^2+1$ et la droite horizontale d'équation $y = 3$.

- $S_1 = \{2.6; 5.4\}$
- $S_2 =]2.6; 5.4[$.
- $S_3 = [2.6; 5.4]$.
- $S_4 =]-\infty; 2.6[\cup]5.4; +\infty[$.
- $S_5 =]-\infty; 2.6] \cup [5.4; +\infty[$.



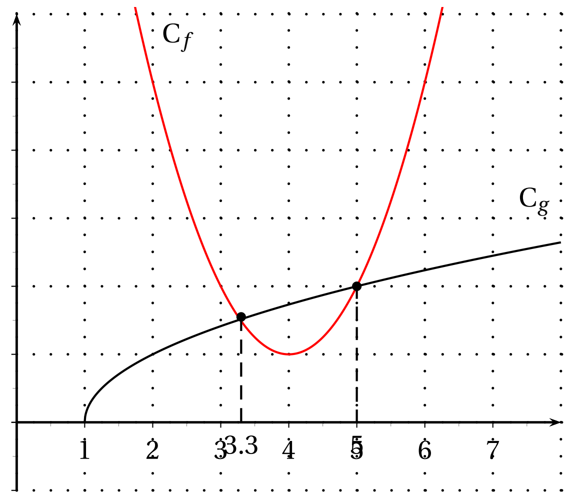
Vérifier à la calculatrice. Et par le calcul ?

Exemple :

Résoudre graphiquement sur $[-1;+\infty[$ l'équation

$$(x-4)^2+1=\sqrt{x+1}$$

Vérifier à la calculatrice.



On trace les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto (x-4)^2+1$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x+1}$ définie sur $[-1;+\infty[$.
On trouve $S=\{3.3;5\}$
Si on cherche à résoudre $f(x)<g(x)$ on trouve $S=]3.3;5[$.
Si on cherche à résoudre $f(x)\leq g(x)$ on trouve $S=[3.3;5]$.
Si on cherche à résoudre $f(x)>g(x)$ on trouve $S=]-\infty;3.3[\cup]5;+\infty[$.
Si on cherche à résoudre $f(x)\geq g(x)$ on trouve $S=]-\infty;3.3]\cup[5;+\infty[$.

Exercice 4 :

1. Tracer à l'écran de la calculatrice la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto x^2+2x-3$
2. **a.** Résoudre alors graphiquement l'équation $f(x)=0$.
   b. Vérifier par le calcul les solutions lues sur le graphique.

Exercice 5 : f est la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x-1$.

1. Tracer à l'écran de votre calculatrice les courbes représentatives des fonctions f et g.
2. **a.** Combien de solutions l'équation $\sqrt{x}=2x-1$ semble-t-elle avoir ? Conjecturer sa (ou ses) valeur(s).
   b. Vérifier cette conjecture par le calcul.

Exercice 6 : f et g sont les fonctions définies sur $[-4;4]$ par :

$$f(x)=(2-x)(x^2+x-7) \quad \text{et} \quad g(x)=4-x^2$$

1. Tracer les courbes représentatives de f et g à la calculatrice.
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\leq g(x)$.

Exercice 7 : On sait que la fonction f vérifie les conditions suivantes :

- son ensemble de définition est $D_f=[-5;4]$
- les nombres -4 et 4 ont la même image 3
- les solutions de l'équation $f(x)=-2$ sont 1 et 2
- le nombre -5 est un antécédent de 0 par f
- $f(-2)=-1$, $f(0)=-3$ et $f(3)=0.5$

Tracer à main levée dans un repère orthonormé une courbe pouvant représenter la fonction f.
Indication *: exploiter chacune des conditions pour remplir un tableau de valeurs de $f(x)$, puis placer les points correspondant dans un repère orthonormé.*

Exercice 8 : $Norbert$ est la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $Norbert(x)=-3x+15$

1. Dans un repère orthonormé, tracer l'allure de la courbe représentative de $Norbert$.
2. Résoudre par le calcul l'équation $Norbert(x) = 0$.
3. Graphiquement, résoudre l'inéquation $Norbert(x) > 0$.
4. Pourriez-vous retrouver ses solutions par le calcul ?

Exercice 9 : $Simone$ est la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $Simone(x) = -2x+5$

1. Dans un repère orthonormé, tracer l'allure de la courbe représentative de $Simone$.
2. Résoudre par le calcul l'équation $Simone(x) = 15$.
3. Graphiquement, résoudre l'inéquation $Simone(x) > 15$.
4. Pourriez-vous retrouver ses solutions par le calcul ?

Exercice 10 : Soit f la foncion définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x$

1. Tracer la courbe de f à l'écran de votre calculatrice.
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
3. Retrouver ses solutions par le calcul.
4. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$.
5. Pourriez-vous les expliquer par un calcul ?

Exercice 11 : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^2 - 5 + 2x$

1. **a.** Réaliser à la calculatrice un tableau de valeurs de $f(x)$ sur $[-1;3]$ avec un pas de 0.5
   b. L'équation $f(x) = 0$ semble-t-elle admettre des solutions ? Si oui, lesquelles ?
2. **a.** Afficher sur l'écran de votre calculatrice la courbe représentative de f sur $[-1;3]$.
   b. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
3. **a.** Développer $f(x)$.
   b. Retrouver les solutions de l'équation $f(x) = 0$ par le calcul.

Exercice 12 : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x+1)^2 - \left(\frac{5}{2}x - 1\right)(2x+1)$

1. **a.** A la calculatrice, tracer la courbe représentative de g avec une fenêtre adaptée.
   b. Lire graphiquement les solutions de l'équation $g(x) = 2$.
   c. Lire graphiquement les éventuels antécédents de 0 par g.
2. **a.** Développer et réduire l'expression $g(x)$.
   b. En utilisant cette dernière écriture, retrouver par le calcul les solutions de l'équation $g(x) = 2$.
3. **a.** Factoriser l'expression $g(x)$.
   b. En utilisant cette dernière écriture, retrouver par le calcul les éventuels antécédents de 0 par g.

Exercice 13 : f est la fonction définie sur l'intervalle $[-5;5]$ par $f(x) = (2x-3)(x+2)$ et g la fonction définie sur $[-5;5]$ par $g(x) = 2x-3$.

1. Tracer à l'écran de votre calculatrice les courbes représentatives des fonctions f et g sur l'intervalle $[-5;5]$.
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$
3. Retrouver ses solutions par le calcul. ***Indication*** *: on écrit que résoudre $f(x) = g(x)$ revient à résoudre $f(x) - g(x) = 0$, puis on remplace $f(x)$ et $g(x)$ par leur expression (sans oublier Nounours), un facteur commun apparait alors, on factorise donc et enfin on pense à appliquer la règle du produit nul.*

Exercice 14 : (E) est l'équation $7x^2 + 10x - 8 = 0$. On pose $f(x) = 7x^2 + 10x - 8$.

1. **a.** Tracer la courbe représentative de f sur votre calculatrice.
   b. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$
2. **a.** Une des solutions de l'équation (E) semble être un nombre entier ; lequel ?
   b. Vérifier par le calcul.
3. **a.** Compléter la phrase suivante : pour tout réel x on a $7x^2 + 10x - 8 = (x+2)(...x - ...)$
   b. En déduire les valeurs exactes des solutions de (E).

Exercice 15 : (E) est l'équation $x^2 + 2x + 3 = 0$. On pose $h(x) = x^2 + 2x + 3$.

1. **a.** Tracer la courbe représentative de h sur votre calculatrice.
   b. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E)
2. **a.** Une des solutions de l'équation (E) semble être un nombre entier ; lequel ?
   b. Vérifier par le calcul.
3. **a.** En remarquant que $x^2+2x+3 = x^2+2x+1+2$, compléter la phrase suivante : pour tout réel x on a $x^2+2x+3 = (x+...)^2 + ...$
   b. En déduire les valeurs exactes des solutions de (E).

Exercices du livre : Hyperbole

n° 16 p 47 + QCM et Vrai-Faux p 54 + n ° 11-12 p 67

I.3. Lecture intelligente

Travail de l'élève 3 :

1. Tracer sur votre calculatrice la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto x^2$
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2 < 5$.
3. Pouvez-vous donner l'ensemble exact des solutions ?

Lorsque que l'on connaît l'expression algébrique de la fonction, on peut parfois être plus précis dans nos réponses, sans forcément avoir besoin de beaucoup de calculs.

Exemples :

- L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \geq 5$ est $\mathscr{S} = \left]-\infty; -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}; +\infty\right[$.
- Résoudre graphiquement mais exactement l'inéquation $3x + 5 > 1$

Exercice 16 : Observer, réfléchir puis résoudre chacune des inéquations :

$$-5x^2 \leq 0 \qquad (x-4)^2 \geq 0 \qquad (x-1)^2 < 0 \qquad x^2 + (x-1)^2 \leq -1$$

Exercice 17 :

1. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto x^2$.
2. Trouver à l'aide du graphique les solutions **exactes** des inéquations suivantes :

a. $x^2 \leq 3$ **b.** $x^2 \geq 2$ **c.** $1 \leq x^2 \leq 5$

Exercice 18 :

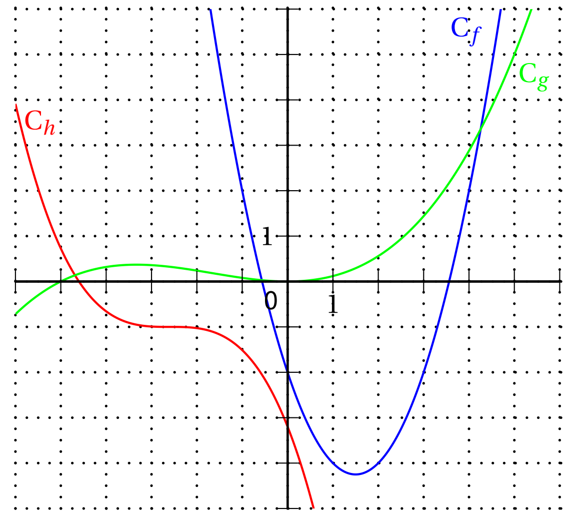
1. Tracer sur votre calculatrice la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.
2. Trouver à l'aide du graphique les solutions des inéquations suivantes :

a. $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{x} \leq 1$ **b.** $-1 \leq \dfrac{1}{x} \leq -\dfrac{1}{4}$ **c.** $-\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{2}$

II) Signe d'une fonction

II.1. Tableau de signes

Travail de l'élève 4 : Donner le signe de chacune des fonctions f, g et h représentées ci-contre.



Lorsqu'on demande le signe d'une fonction f, on demande en fait de résoudre simultanément :

$$f(x) < 0 \qquad f(x) = 0 \qquad f(x) > 0$$

Graphiquement, il s'agit respectivement de quand la courbe représentative de f est en-dessous de l'axe des abscisses, coupe l'axe des abscisses et est au-dessus de l'axe des abscisses.
Nous savons donc théoriquement déjà faire cela.
La seule nouveauté sera la manière de présenter les résultats. En effet, pour plus de clarté, nous les consignerons dans un tableau, appelé tableau de signes

- ⇝ La première ligne du tableau contiendra les valeurs critiques de x : celles pour lesquelles f s'annule et/ou change de signe.
  On ne tient pas compte de l'échelle, on espace ces valeurs de manière homogène.
- ⇝ La seconde ligne contient le signe de $f(x)$ correspondant aux cases formées par la première ligne. On résume le signe par + et −.
  Dans cette ligne, on fait également apparaître un 0 sous les valeurs des x qui annulent f.

Exemple :

Dans l'activité précédente, on aurait donc pu répondre :

x	$-\infty$		-0.6		3.6		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-5		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

x	$-\infty$		-4.7		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	

Exercices du livre : Hyperbole

n° 17-18 p 67

II.2. Lecture intelligente

II.2.a. Somme, produit, carré et inverse

Travail de l'élève **5.** Pouvez-vous donner le signe des fonctions f, g, h, k et l suivantes sans regarder leur courbe représentative ?

- $\rightsquigarrow$ $f(x)=35x^2+8$,
- $\rightsquigarrow$ $g(x)=-4x^2-3$
- $\rightsquigarrow$ $h(x)=\dfrac{1}{x}$
- $\rightsquigarrow$ $k(x)=3x+5$
- $\rightsquigarrow$ $l(x)=35x^2+38x+8$

On sait qu'un carré est toujours positif et qu'un nombre et son inverse sont de même signe.
Ainsi, une expression ne contenant que des carrés, des sommes de nombres positifs, des multiplications par un nombre positif et/ou des inverses de nombres positifs sera toujours positive.
Il est dans ce cas inutile de regarder la courbe représentative de la fonction correspondante.

Exemple :

Soient les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+3$, $g(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$ et $h(x)=-4x^2-7$.
Les fonctions f et g sont toujours positives (leurs courbes représentatives sont au-dessus de l'axe des abscisses).
Tandis que la fonction h est toujours négative (sa courbe représentative est en-dessous de l'axe des abscisses).

Contre-Exemple :

Soient les fonctions k et l définies par $k(x)=3x+5$ et $l(x)=35x^2+38x+8$.
Comme la variable x peut être négative (même si son signe n'est pas visible dans l'expression des fonctions), les fonctions k et l changent de signe.

II.2.b. Fonctions affines

Travail de l'élève **6.** Etudions par lecture intelligente le signe de la fonction k définie précédemment par $k(x)=3x+5$.

1. Lecture graphique simple : donner graphiquement le tableau de signes de k.
2. Lecture graphique intelligente :
   a. Donner la nature de la fonction k. Que pouvez-vous en déduire sur sa représentation graphique ?
   b. Quel est le coefficient directeur de k ? Que pouvez-vous en déduire sur l'orientation de sa courbe repésentative ?
   c. Résoudre $k(x) = 0$
   d. En déduire le tableau de signes exact de k.

Propriété 1 : *Signe d'une fonction affine*

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$.

Alors $f(x) = 0$ pour $x = -\dfrac{b}{a}$ et

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		Signe Opposé de a	0	Signe de a	

Remarque : On retiendra que la fonction est du signe de a à **droite** du 0 (du signe opposé sinon).

Preuve

Si $a > 0$ (on raisonne de même si $a < 0$) :

$$ax+b=0 \overset{-b}{\iff} ax=-b \overset{\times\frac{1}{a}}{\iff} x=-\frac{b}{a}$$

$$ax+b>0 \overset{-b}{\iff} ax>-b \overset{\times\frac{1}{a}>0}{\iff} x>-\frac{b}{a}$$

$$ax+b<0 \overset{-b}{\iff} ax<-b \overset{\times\frac{1}{a}>0}{\iff} x<-\frac{b}{a}$$

Exemple :

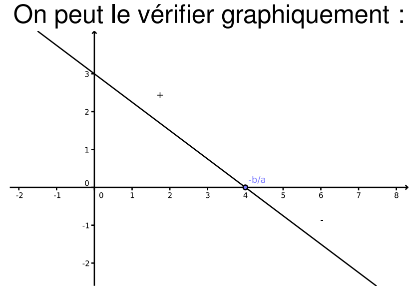
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{3}{4}x + 3$. On a :

$$f(x) = 0 \iff -\frac{3}{4}x + 3 = 0 \iff -\frac{3}{4}x = -3 \iff x = -\frac{3}{-\frac{3}{4}} = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

De plus, $a < 0$. Donc la fonction f admet pour tableau de signes :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
Signe de $-\dfrac{3}{4}x+3$		$+$	0	$-$	

On peut le vérifier graphiquement :



Exercices du livre : Hyperbole

Refaire le 17 p 67

II.2.c. Produit (ou quotient) de fonctions affines

Travail de l'élève **7.** Etudions par lecture intelligente le signe de la fonction l définie précédemment par $l(x) = 35x^2 + 38x + 8$, ainsi que celui d'autres fonctions.

1. La fonction l :

- **a.** Donner graphiquement le tableau de signes de l.
- **b.** Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $l(x) = (5x+4)(7x+2)$
- **c.** Résoudre $l(x) = 0$.
- **d.** En déduire le tableau de signes exact de l.

2. Soient les fonctions m et n définies sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = -2x+1$ et $n(x) = -6x-2$.

- **a.** Etablir le tableau de signes des fonctions m et n
- **b.** Etablir graphiquement le tableau de signe de la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = (-2x+1)(-6x-2)$.
- **c.** Comment retrouver ce résultat par le calcul ?
- **d.** Etablir graphiquement le tableau de signe de la fonction r définie sur $\mathbb{R}$ par $r(x) = \dfrac{-2x+1}{-6x-2}$.
- **e.** Comment retrouver ce résultat par le calcul ?

> ***Signe d'un produit (ou d'un quotient)***
>
> Grâce à la règle des signes dans une multiplication (ou une division), on peut trouver le signe d'un produit (ou d'un quotient) d'expressions du type $ax+b$.
> Pour cela, on commence par résoudre l'équation produt nul (ou le dénominateur égal à 0, ainsi que le numérateur) , puis on utlise un grand tableau de signes.
> Sur la dernière ligne, on trouve le signe du produit (ou du quotient) en appliquant la règle des signes.

Attention !

- On ne peut pas appliquer cette règle pour une addition d'expression du type $ax+b$, car on n'a pas de règle de signes dans ce cas là !
- $(ax+b)(cx+d)$ est positif quand $ax+b$ et $cx+d$ sont tous les deux positifs certes, mais aussi quand ils sont tous les deux négatifs !
  Ceci est long à écrire, lors d'une résolution classique. Le tableau de signe s'avère alors rapide et efficace pour trouver le signe de ce type d'expressions.
- On notera que 0 multiplié par n'importe quoi donne 0.
  Par contre, n'importe quoi divisé par 0 donne une valeur interdite !

Exemples :

1. On souhaite résoudre $(2x+1)(-x+2) \leq 0$. On a :

$$(2x+1)(-x+2) = 0 \iff 2x+1 = 0 \quad \text{ou} \quad -x+2 = 0 \iff x = -\frac{1}{2} \quad x = 2$$

Le tableau de signe de cette expression est :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
Signe de $2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $(2x+1)(-x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion : $(2x+1)(-x+2) = 0$ ssi $x \in \left\{-\frac{1}{2}; 2\right\}$

$$(2x+1)(-x+2) > 0 \text{ ssi } x \in \left]-\frac{1}{2}; 2\right[\qquad \text{et} \qquad (2x+1)(-x+2) < 0 \text{ ssi } x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]2; +\infty\right[$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\mathrm{P}(x) \leq 0$ est donc $\mathrm{S} = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[2; +\infty\right[$

2. Résoudre $\mathrm{Q}(x) = \dfrac{2x+1}{-x+2} \leq 0$.

On sait que $2x+1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$ et on sait que $-x+2 = 0 \iff x = 2$ (valeur interdite).

On a donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
Signe de $2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $\dfrac{2x+1}{-x+2}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\mathrm{Q}(x) \leq 0$ est donc $\mathrm{S} = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left]2; +\infty\right[$

Exercice 19 :

On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x \qquad g(x) = x^3 - 3x \qquad h(x) = x - 3$$

1. Etablir à la calculatrice un tableau de valeurs pour les trois fonctions, allant de -2 à 4, de pas 0.5.
2. Tracer dans un même repère orthogonal les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ respectivement des fonctions f, g et h sur $[-2; 4]$.
   Unités graphiques : 2 cm pour l'axe des abscisses, 1 cm pour l'axe des ordonnées.
3. Est-il vrai que le point de coordonnées $(0.5; -1.3)$ appartient à $\mathscr{C}_g$? Justifier.
4. Etablir les tableaux de signes de f, g et h (on factorisera éventuellement les expressions).

Exercices du livre : Hyperbole

8-13 p 120 + 15-17-18-19-26-28-29-31 p 121 + 34-35 p 123 + 46-48-49-50-51 p 125

III) Un peu d'algo : les boucles Si et Pour

Exercice 21 :

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = 2x^2 - x + 1$ et $g(x) = \dfrac{3x+1}{2x-1}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ? Celui de g ?
2. **Boucle Si**.
   a. Que fait l'algorithme 1 ?
   b. Ecrire un algorithme similaire pour la fonction g (en prenant soin de traiter à part le cas de la valeur interdite)
3. **Boucle Pour.**
   a. Que fait l'algorithme 2 ?
   b. Ecrire un algorithme qui donne un tableau de valeurs de g, pour x allant de -2 à 3, avec un pas de 0.5 (avec pour réponse « valeur interdite » quand nécessaire).

Algorithme 1 :

Variables
  x, y et a sont des nombres réels

Début
  Entrer x et y
  a prend la valeur $2x^2 - x + 1$
  Si $(y == a)$ **Alors**
    Afficher « Le point $(x; y)$ appartient à la courbe représentative de f »
  Sinon
    Afficher « Le point $(x; y)$ n'appartient pas à la courbe représentative de f »
  Fin Si
Fin

Algorithme 2 :

Variables
  x, y et i sont des nombres réels

Début
  Entrer x
  Pour $i = -3$ **à** 5 **Faire**
    y prend la valeur $2x^2 - x + 1$
    Afficher $(x; y)$
    i prend la valeur $i + 1$
  Fin Pour
Fin

Exercice 22 :

On considère la fonction f définie sur $[-2; 4]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \in [-2; 1] \\ -x^2+1 & \text{si} \quad x \in]1; 4] \end{cases}$$

1. Ecrire un algorithme qui permette de calculer l'image par f d'un nombre x.
2. Construire la courbe représentative de f.

Exercice 23 :

On considère l'algorithme 3 :

1. Faire fonctionner cet algorithme pour $x = -2$, $x = 1$ et $x = 3$.
2. Cet algorithme définit une fonction f.
   a. Donner l'ensemble de définition de f.
   b. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
   c. Représenter graphiquement la fonction f.

Algorithme 3 :

Variables
  x et y sont des nombres réels

Début
  Entrer x
  Si $(x < 1)$ **Alors**
    $y \leftarrow x^2$
  Sinon
    $y \leftarrow 2x$
  Fin Si
  Afficher y
Fin

IV) En bref

Méthodes pour déterminer graphiquement

- **Un ensemble de définition** : On détermine l'ensemble des abscisses de tous les points de la courbe représentative.
  Puis on le décrit sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles, en faisant attention aux bornes (crochets ouverts ou fermés).
- **L'image** $f(a)$ **d'un réel** a : On place sur la courbe le point d'abscisse a et on lit son ordonnée.
- **Les éventuels antécédents d'un réel** b : On place sur la courbe tous les points éventuels d'ordonnées b (on peut les mettre en évidence en traçant la droite parallèle à l'axe des abcisses passant par le point $(0;b)$ d'équation $y=b$) et on lit leur abscisses.

C. Aupérin
c.auperin@wicky-math.fr.nf