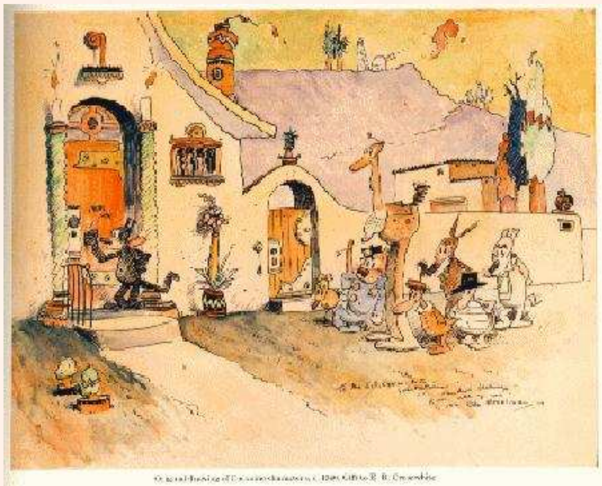
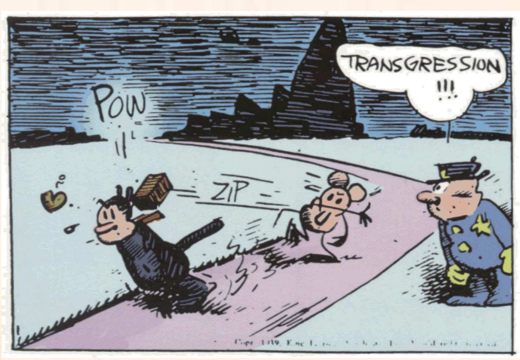
Chapitre 3

Les fonctions numériques



Hors Sujet



Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

Titre : « Krazy Kat »
Auteur : George Herriman
Présentation succinte : Krazy Kat est un comic strip américain créé par George Herriman et publié dans les journaux du pays, entre 1913 et 1944. La première publication se fit dans le New York Evening Journal. La série mêle surréalisme, poésie insouciance enjouée, ce qui en a fait l'une des BD préférées des passionnés et des critiques depuis plus de 80 ans. Les strips sont centrés sur une relation triangulaire entre son personnage éponyme, un chat innocent et désinvolte de sexe indéterminé (mais le plus souvent considéré comme une femelle), son antagoniste Ignatz Mouse, et le sergent Pupp (Officer Pupp), officier de police. Krazy est transi d'amour pour Ignatz mais celui-ci le méprise, et passe son temps à chercher à lui lancer une brique à la tête. Ce que Krazy interprète comme une preuve d'amour… Pupp, en tant que garant de l'ordre de la région de Coconino, fait tout pour empêcher Ignatz d'arriver à son but et enferme bien souvent la souris en prison.

En dépit de la simplicité de l'intrigue, la créativité verbale et visuelle d'Herriman, fait de Krazy Kat l'une des premières bandes dessinées à avoir été considérée comme de l'art par les intellectuels. Gilbert Seldes, célèbre critique d'art de l'époque, écrivit en 1924 qualifia le strip de « travail artistique le plus amusant, fantastique et satisfaisant de l'Amérique contemporaine ». Le poète renommé E. E. Cummings, autre admirateur de George Herriman, écrivit l'introduction du premier album de Krazy Kat. Plus récemment, beaucoup de scénaristes et dessinateurs constatent que le strip a eu une influence majeure sur leurs œuvres.

Table des matières

L'ESSENTIEL :

- $\rightsquigarrow$
- $\rightsquigarrow$
- $\rightsquigarrow$
- $\rightsquigarrow$

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

CHAPITRE 3:

LES FONCTIONS NUMÉRIQUES

Au fil du temps

Le concept de fonction a mis des siècles à s'établir en mathématiques. La notion intuitive comme relation entre plusieurs quantités est assez ancienne, mais il faut attendre le XVII^e siècle pour qu'elle soit formalisée. Découvrir les fonctions, apprendre à les représenter et à étudier certaines de leurs propriétés représente une partie importante du programme de seconde.

- C'est le français Pierre de Fermat (16010-1665) qui met en place la notion fondamentale d'équation d'une courbe, associant donc ainsi les fonctions à une courbe du plan, et s'intéresse aux extrema de fonctions.
  Fermat est essentiellement connu pour ses théorèmes en arithmétique, notamment pour son grand théorème, qu'il prétendit avoir démontré dans une note de bas de page, mais dont la preuve ne fut trouvée qu'en 1994.
- En 1673, l'allemand Gottfried von Leibniz (1646-1716), à la fois philosophe et mathématicien, utilise pour la première fois le mot « fonction » et introduit le vocabulaire.
  Leibniz est essentiellement connu en sciences pour avoir découvert conjointement avec Newton le calcul infinitésimal, c'est-à-dire dans l'infiniment petit.
- En 1698, le suisse Jean Bernoulli (1667-1748) reprit le terme et en donne une première définition. Il proposa alors la notation $f(x)$.
  Bernoulli développa le calcul exponentiel et la théorie des probabilités.
- Euler, mathématicien formé par Bernoulli, adopte cette notation en 1734 et définit en 1748 une fonction d'une variable comme combinaison d'opérations à partir de cette variable et de nombres constants.
  Euler travailla essentiellement sur le calcul infinitésimal lui aussi et sur la théorie des graphes (utiliser pour les GPS)

En fait, le lien entre l'expression algébrique d'une fonction et sa courbe représentative en permet une étude plus approfondie. Le concept de fonction et l'étude de leur propriété a révolutionné la recherche mathématique. jusqu'à aujourd'hui.
Compte tenu du nombre incroyable d'applications en physique, en économie et dans quasiment tous les domaines, l'étude des fonctions est l'un des objectifs majeurs du lycée en mathématiques.

Dans ce chapitre, nous allons essentiellement découvrir le vocabulaire, travailler les calculs et l'approche graphique. Cependant, tout cela nous permettra également de réfléchir aux différents types de nombres et ensembles les désignant, ainsi qu'à la pertinence d'une écriture d'expression algébrique plutôt qu'une autre.

Tout au long du chapitre, on peut faire des exercices de révision sur le développement et la factorisation. Voir la fiche révision ou encore les exercices n° 18 à 27 p 48 + nº 44 p 52

I) Notion de fonction

I.1. Activité découverte

Travail de l'élève 1 : A la Cavayère, le responsable aménage une zone de baignade surveillée de forme rectangulaire, dont l'un des côtés est évidemment sur la rive du lac.
Il dispose d'un cordon flottant de 160 m de longueur et de deux bouées.
Le responsable cherche à placer ses bouées pour que l'aire de baignade soit maximale.
Pouvez-vous l'aider ?

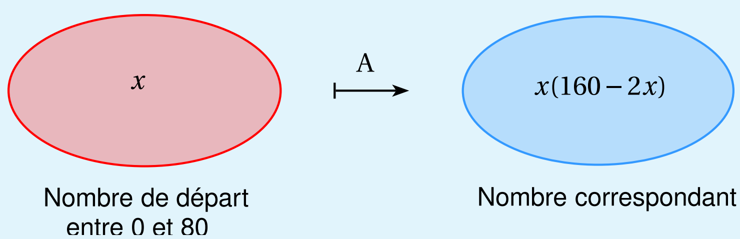
Prolongement possible : En utilisant le graphique, dire pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire de la zone de baignade soit égale à 2500 m^2.

Objectifs **:** modéliser d'un problème, introduire la notion de variable, faire le lien entre deux quantités, introduire la notion de fonction, réinvestir les intervalles en introduisant la notion de valeurs interdites, constater la pertinence de faire un tableau de valeurs et/ou de représenter une fonction (choix de l'échelle : 1cm=400 m^2).

Conclusion

Pour chaque longueur x, on a fait correspondre un nombre A égal à l'aire de la zone de baignade.
Par exemple, on a $25 \longmapsto 2750$ et $43 \longmapsto 3182$.
De façon générale on note $\mathrm{A} : x \longmapsto x(160-2x)$. Ceci se lit « A qui à x associe $x(160-2x)$ ».
Pour préciser de plus que les valeurs de x sont dans l'intervalle $[0;80]$ on écrira :

$$\begin{array}{lllll} \mathrm{A} & : & [0;80] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x(160-2x) \end{array}$$



La valeur de A varie **en fonction de** x, A est donc appelée une **fonction**.
x est appelé la **variable** et on note la valeur de l'aire correspondante $\mathrm{A}(x)$. Ceci se lit « A de x ».
On a donc $\mathrm{A}(x) = x(160-2x)$. Par exemple $\mathrm{A}(25) = 2750$ et $\mathrm{A}(43) = 3182$.

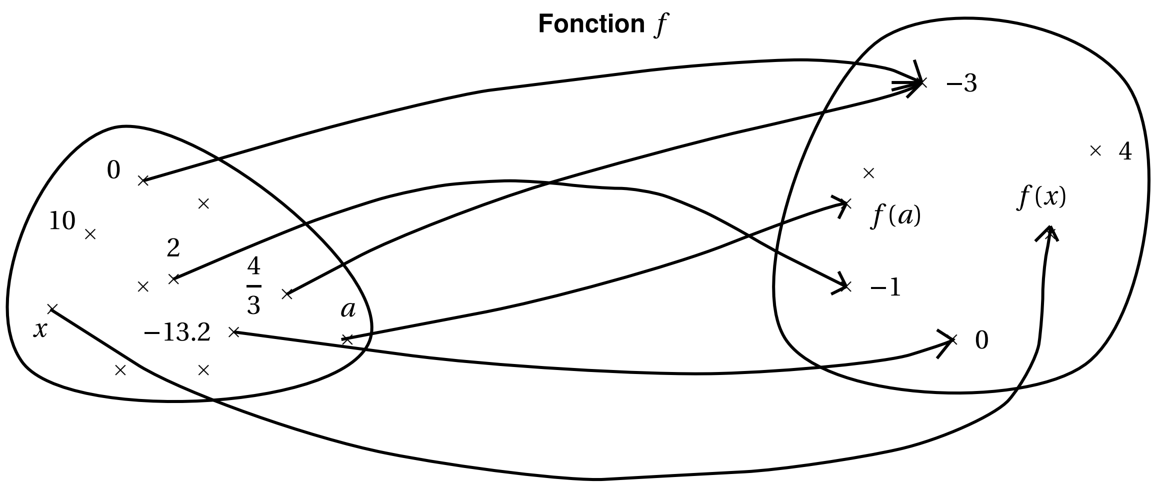
Remarque : Chaque fois qu'une valeur y dépend d'une valeur x, on dit que la première est une fonction de la seconde.
Par exemple, l'aire A d'un cercle est une fonction de son rayon r : $\mathrm{A}(r) = \pi r^2$ On va ici développer cette notion de fonction.

I.2. Définition et notations

Définition 1.

Une **fonction** est une relation qui fait correspondre un élément donné d'un ensemble de départ à *au maximum* un élément d'un ensemble d'arrivée (donc à 0 ou 1 élément).
Nous ne nous intéresserons qu'aux fonctions associant un nombre à un autre. On parle de fonction **numérique à une variable**, la variable étant le nombre de départ.
Fabriquer une fonction f sur un ensemble de départ D c'est donner un algorithme (une procédure ici calculatoire) qui à chaque élément $x \in D$ associe **au plus** un nombre, souvent noté $f(x)$.

Illustration :



Ainsi, $f(2) = -1$, $f(-13.2) = 0$ et $f(0) = -3$ et $f\left(\frac{4}{3}\right) = -3$. 10 n'est associé à aucun nombre par la fonction f.

Attention !

On ne peut pas faire partir deux flèches d'un même nombre de l'ensemble de départ.

Exemples :

Vous connaissez déjà quelques fonctions numériques en géométrie :

- Le périmètre P d'un cercle est une fonction. Sa variable est le rayon R d'un cercle, et à tout nombre réel positif R, la fonction P associe un unique nombre réel $P(R) = 2\pi R$.
  Si $R < 0$, la fonction P n'associe aucune valeur correspondante.
- La formule de l'aire A d'un triangle est la fonction qui à tout couple de nombres réels positifs (b, h) associe le nombre $A(b, h) = \dfrac{b \times h}{2}$ Il s'agit d'une fonction numérique à deux variables b et h.

Exercice du Cours :
Calculer le périmètre d'un cercle de rayon 4.
Existe-t-il un nombre tel que le périmètre du cercle vaut 4 ?

Remarque : Une fonction peut associer autre chose que des nombres entre eux. Par exemple, à deux points on peut associer le milieu du segment correspondant.

Exercice(s) de la fiche : n° 1 et 2 (algo)

II) Images et applications

II.1. Calculer une image

Définition 2.

Soit f une fonction qui à un nombre x associe un nombre $f(x)$. On note $f : x \longmapsto f(x)$.
L'**image** d'un nombre a par la fonction f est le nombre b tel que $b = f(a)$.

Exercice du Cours : Soit g la fonction qui à un nombre x associe le nombre $g(x) = 5 - 9x^2 + 3x$.
Calculer l'image de 0, 5, -2 et $\frac{1}{3}$.

Remarques :

- L'image d'un nombre, si elle existe, est unique (une flèche maximum par nombre au départ).
  On la calcule grâce à l'expression de la fonction.
- Pour obtenir rapidement plusieurs images par une même fonction ou pour vérifier des calculs, on peut demander à la calculatrice d'afficher un tableau de valeurs (voir fiche TI ou cadre ci-dessous).

Utilisation de la Casio

- On rentre la fonction considérée dans `Menu` + `Graph`.
- On règle les paramètres du tableau de valeurs (première, dernière valeur de x et pas) dans
  `Menu` + `Table` + `F5`
  ```
  Start : ...
  End : ...
  Pitch : ... (ou Step )
  ```
  Valider par `EXE` deux fois.
- On affiche le tableau de valeurs dans le menu `Table` : `TABL` `F6`

Exemple :

Vérifier vos calculs précédents grâce à un tableau de valeurs sur votre calculatrice.

Exercice(s) de la fiche : n° 3 à 6 (calculs, fct définies par morceaux et instructions conditionnelles)

II.2. Déterminer les éventuelles valeurs interdites

Travail de l'élève 2 : Soit h la fonction qui à un nombre x associe le nombre $h(x) = \dfrac{3}{6-2x}$.
Calculer l'image de 1, -4 et 0.

Question :

Que dire de l'image de 3 par la fonction h ? Pourquoi ?

Définition 3.

Par définition d'une fonction, un élément de départ peut ne pas avoir d'image, on dit alors que c'est une **valeur interdite**.

Exercice du Cours : Déterminer les éventuelles valeurs interdite des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \frac{4}{x+2} \qquad g : x \longmapsto 2x^2 - 3x + 4 \qquad h : x \longmapsto \frac{3x+1}{4-5x} \qquad k : x \longmapsto \sqrt{x+1} \qquad l : x \longmapsto \sqrt{-x}$$

Méthode

On trouve les valeurs interdites en suivant les deux règles suivantes :

- **On ne divise pas par zéro**
- **On ne prend pas racine d'un nombre strictement négatif**

Eventuellement, le contexte rajoute des valeurs interdites (comme une distance négative en géométrie.
Il faudra donc toujours se poser les questions suivantes sur l'expression $f(x)$,

- Y a-t-il un quotient ? Si oui, le dénominateur peut-il être nul ? *On résout une équation*
- Y a-t-il une racine ? Si oui, la quantité dont on prend la racine peut-elle être strictement négative ? *On résout une inéquation*.

Définition 4.

Le **domaine de définition** d'une fonction f est l'ensemble des nombres réels, sauf les valeurs interdites.
On le note en général D_f.

Exercice du Cours : Ecrire les domaines de définition des fonctions précédentes.
Déterminer le domaine de définition de la fonction $l : x \longmapsto 3\sqrt{4x+2} + \sqrt{10-5x}$

Exercice(s) de la fiche : n° 7 à 9 (calculs et algo)

II.3. Représentation graphique

Travail de l'élève 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2 - 3$. Compléter le tableau de valeurs suivant grâce à la calculatrice :

x	-4	-3	-2	-1.5	-1	-0.5	0	1	2
$f(x)$									

Représenter dans un repère orthonormé les points de coordonnées $\big(x; f(x)\big)$ du tableau.
Imaginer alors l'allure de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.
Le point $\mathrm{A}(1.5; 1.25)$ appartient-il à $\mathscr{C}_f$? Et le point $\mathrm{B}(0.5; -0.7)$?

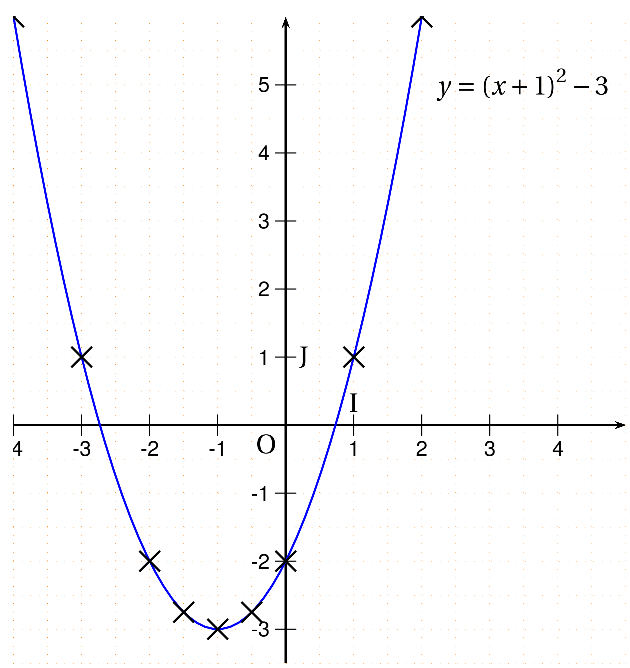
Définition 5.

On se place dans un repère du plan.
La **courbe représentative** $\mathscr{C}_f$ (ou encore **représentation graphique**) d'une fonction f définie sur D_f est l'ensemble des points de coordonnées $\big(x; f(x)\big)$ où x parcourt D_f.
Autrement dit :

$$\mathrm{M}(x; y) \in \mathscr{C}_f \text{ signifie que } \begin{cases} \text{Son abscisse } x \in \mathrm{D}_f \\ \text{L'image de son abscisse } x \text{ par la fonction } f \text{ est son ordonnée } y. \end{cases}$$

On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$.

Exemple :
Représentation graphique de la fonction de l'activité précédente.



Méthode

Pour tracer la courbe représentative d'une fonction, on relie les points d'un tableau de valeurs avec le plus de cohérence possible.
Néanmoins, on ne sait pas exactement comment varie la fonction entre deux points de la courbe, (ni en dehors du graphique).
Ainsi, **plus on place de points, plus l'allure de notre représentation est sera précise**.
On prendra donc toujours un tableau avec ***au moins 10 valeurs*** et on consultera le tracé de la courbe sur la calculatrice pour s'aider (voir fiche TI ou cadre ci-dessous).

Utilisation de la Casio

- On rentre la fonction considérée dans `Menu` + `Graph`
- On règle les paramètres de la fenêtre graphique (début et fin du x, début et fin du y, échelle) dans

  `Menu` + `Graphe` + `F5`

  ```
  Xmin : ...
  max :...
  scale : ...
  Ymin : ...   etc
  ```

  Valider par `EXE`
- On affiche la courbe représentative dans le menu `Graphe` : `DRAW` `F6`.
- On affiche un curseur sur la courbe donnant les coordonnées des points de la courbe par `Trace` `F1`.

Exemples :

Tracer les courbes représentatives des fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par

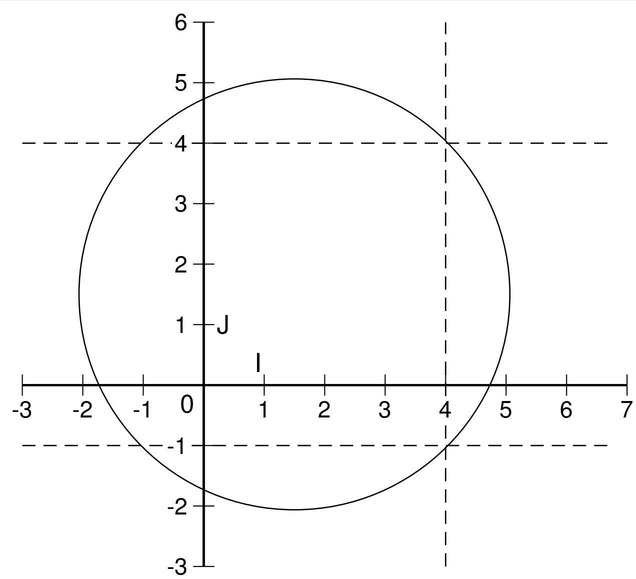
$$f(x) = 3 \qquad g(x) = 2x+1 \qquad h(x) = -2x+1 \qquad \text{et} \qquad k(x) = \frac{1}{x}$$

Question :

Que constatez-vous pour la dernière courbe ? Comment l'expliquer ?

Remarque :
Toutes les courbes ne représentent pas des fonctions.
On s'appuie sur la définition pour le comprendre.
En effet, un élément ne peut avoir plusieurs images.

Ci-contre, on constate que le nombre 4 possède deux images : -1 et 4.
La courbe ci-contre n'est donc pas représentative d'une fonction.



A retenir

Une courbe représentative de fonction ne peut pas être « verticale » ni « revenir en arrière »
Par contre, elle peut avoir des « trous », c'est là où il y a des valeurs interdites

Exercice(s) du livre : n° 10-11-12 p 47

Exercice(s) de la fiche : nº 10 (courbe) + nº 11 (algo) et nº 12-13 (fonctions définies par morceaux et algo)

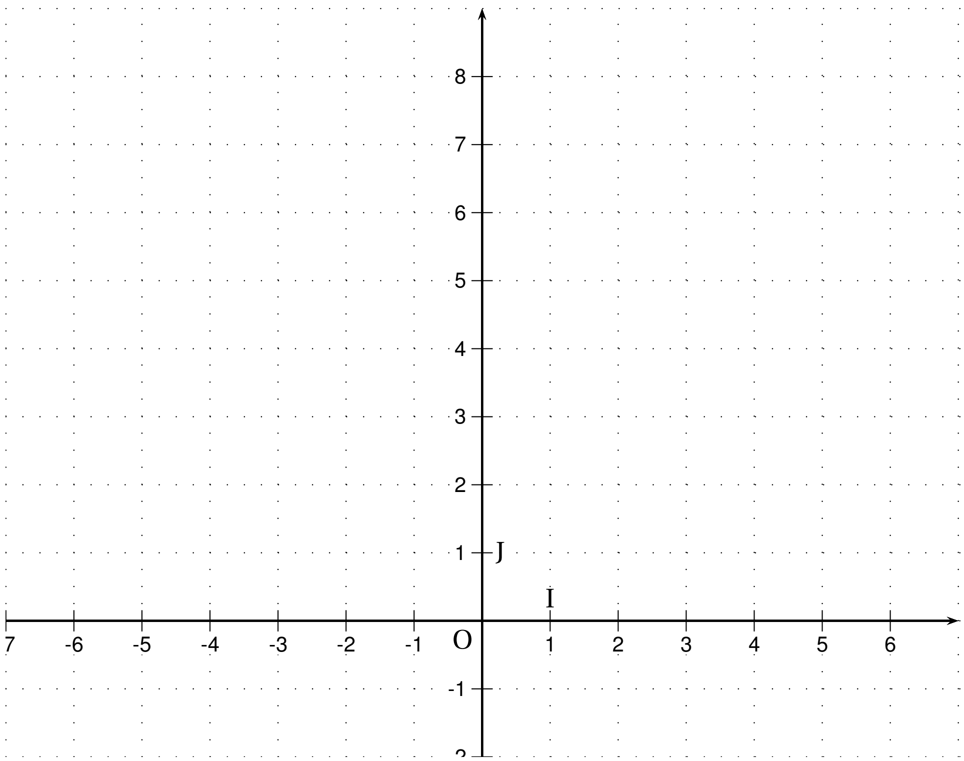
III) Antécédents

Travail de l'élève 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)^2 - 1$.

1. Compléter à l'aide de la calculatrice son tableau de valeurs ci-dessous :

x	-2	-1	0	1	1.5	2	2.5	3	4	5
$f(x)$										

2. Représenter alors l'allure de sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans le repère orthonormé (O, I, J) ci-dessous :



3. Le point $A(-0.5; 5)$ appartient-il à $\mathscr{C}_f$? Et le point $B(5; 8)$?

4. Déterminer graphiquement les nombres suivants :

$f(-0.5)$ $\qquad$ $f(3.5)$ $\qquad$ l'image de 0

5. Résoudre graphiquement les équations suivantes :

$f(x) = 0 \qquad f(x) = 4 \qquad (x-2)^2 - 1 = 3 \qquad (x-2)^2 - 1 = -1 \qquad (x-2)^2 - 1 = -2$

Définition 6.

Soit $f : x \longmapsto f(x)$.
Un **antécédent** d'un nombre b par la fonction f est un nombre a dont l'image vaut b, ie tel que $f(a) = b$.

Exemples :

Dans l'activité précédente, les antécédents de 0 sont ... car ...
l' antécédent de -1 est ... car ...
-2 n'a pas d'antécédent car ...

Exercice du Cours :

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$.
  1. Déterminer les images de 7, de 0 puis de -3 par la fonction f.
  2. Déterminer les éventuels antécédents de 7, de 0 et de -3 par a fonction f.
- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à un nombre x associe le nombre $g(x) = (5-3x)(4x+2)$.
  1. Déterminer $g(0)$ et $g(-1)$.
  2. Déterminer les éventuels antécédents de 0 par la fonction g
  3. Pouvez-vous utiliser la même méthode pour déterminer les éventuels antécédents de -1 par la fonction g ? Pourquoi ?
- Soit h la fonction qui à un nombre x associe le nombre $h(x) = \dfrac{4}{6-2x}$.
  1. Déterminer les images de 1, -3 et de 0 par la fonction h.
  2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.
  3. Déterminer les éventuels antécédents de 1, de -3 et de 0 par la fonction h.
  4. Résoudre $h(x) = 3$. Traduire votre réponse en termes d'antécédents de la fonction h.

Remarque : L'image d'un nombre, si elle existe, est unique et on les trouve en comptant simplement.
Par contre, les nombres de l'ensemble d'arrivée peuvent avoir 0, 1 ou même plusieurs antécédents.
On trouve les éventuels antécédents d'un nombre **en résolvant une équation**.

Exercice du Cours : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (4-x)(x+2)$.

1. Déterminer $g(0)$, $g(8)$.
2. Calculer l'image de 7, de 11 et de 3
3. Déterminer les éventuels antécédents de 0.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $g(x) = -x^2 + 2x + 8$.
5. En déduire les éventuels antécédents de 8.
6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $(x+1)^2 + 7 = g(x)$.
7. En déduire les éventuels antécédents de 7, de 11 puis de 3.

Exercice(s) de la fiche : n° 14 à 17 (calculs et algo)

Exercice(s) du livre : **Hyperbole** n° 7-9 p 46 (basique) + n° 28-30 p 48 (choix d'une écriture, **corrigés**)

IV) En bref

Image et Antécédents par une fonction f

1. L'**image** d'un nombre a est le nombre $f(a)$.
   On le calcule, autrement dit **on compte**.
2. Les **éventuels antécédents** d'un nombre b sont les nombres x tels que $f(x) = b$.
   Ce sont donc les solutions de l'**équation** $f(x) = b$ que l'on doit **résoudre**.
   Il peut y avoir aucune, une ou plusieurs solutions !

Valeurs interdites et ensemble de définition d'une fonction f

⇝ Les valeurs interdites sont les nombres qui n'ont pas d'image.
Pour les trouver, on applique les deux règles suivantes :

1. On ne divise pas par zéro : on **résout une équation** lorsque le problème se pose.
2. On ne prend pas la racine d'un nombre strictement négatif : on **résout une inéquation** lorsque le problème se pose.

⇝ Le **domaine de définition** d'une fonction f est l'ensemble des valeurs « autorisées », c'est-à-dire tous les nombres réels sauf les éventuelles valeurs interdites trouvées précédemment.
On le note sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalle.

Représentation graphique

⇝ La représentation graphique d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$.
Pour tracer son allure :

- On obtient un tableau de valeurs de f grâce à la calculatrice
- On place les points du tableau dans un repère (plus on en a, mieux c'est)
- On les relie de manière cohérente
- On vérifie grâce à la calculatrice.

⇝ Un point $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A})$ appartient à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f si et seulement si $y_\mathrm{A} = f(x_\mathrm{A})$
Ainsi, pour savoir si $\mathrm{A} \in \mathscr{C}_f$:

- On calcule l'image de l'abscisse x_A, c'est-à-dire $f(x_\mathrm{A})$.
- Si on trouve l'ordonnée y_A de A, c'est-à-dire si $f(x_\mathrm{A}) = y_\mathrm{A}$, alors $\mathrm{A} \in \mathscr{C}_f$, sinon $\mathrm{A} \notin \mathscr{C}_f$