Chapitre 1

Les nombres réels à la règle et au compas

Hors Sujet

Titre : « Autoportrait avec cigarette (1895) » et « La madone (1895-1902) »
Auteur : Edvard Munch
Présentation succinte : Edvard Munch (1863 - 1944) est un peintre expressionniste norvégien, souvent considéré comme le pionnier de l'expressionnisme et très tôt réputé pour son appartenance à une nouvelle époque artistique en Europe. L'importance de son œuvre est aujourd'hui reconnue dans le monde.
Les œuvres de Munch les plus connues sont celles des années 1890, notamment *Le Cri* (1893) (cf fin du cours), pièce de la série *La Frise de la Vie*, que Munch a assemblée au tournant du siècle. Sa production ultérieure attire toutefois de plus en plus l'attention et semble inspirer tout spécialement les artistes actuels.
Munch traite d'une manière récurrente des thèmes de la vie, de l'amour, de la peur et de la mort. La collection la plus importante de ses œuvres se trouve au le Musée Munch dans Oslo. Quelques-unes de ses peintures se trouvent à la galerie nationale d'Oslo. L'Hotel Continental d'Oslo possède de nombreuses impressions. Enfin, la pinacothèque de Paris a organisé en 2010 la superbe exposition *Anti-Cri* regroupant de nombreux tableaux de Munch, issus de collections privées.
Le Cri et *La Madone* ont été volés le 22 août 2004 au musée Munch d'Oslo. Ils ont été récupérés dans des circonstances non connues en août 2006 en Norvège... Les deux œuvres ensemble sont estimées à 100 millions de dollars.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

L'ESSENTIEL :

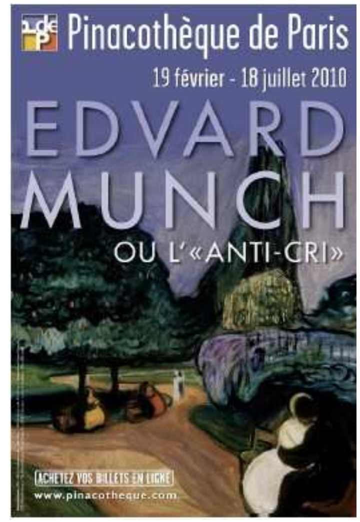
- ⇝ Construire précisément des longueurs grâce aux bases de la géométrie plane
- ⇝ Découvrir les ensembles de nombres
- ⇝ Se repérer dans le plan
- ⇝ Calculer des coordonnées de milieu dans un repère
- ⇝ Calculer des distances dans repère orthonormé.

« *La maladie, la folie et la mort sont les anges noirs qui ont veillé sur mon berceau* »
EDVARD MUNCH

CHAPITRE 1:

LES NOMBRES RÉELS

À LA RÈGLE ET AU COMPAS



Résumé

Euclide a fondé sa géométrie sur un système d'axiomes qui assure en particulier qu'il est toujours possible de tracer une droite passant par deux points donnés et qu'il est toujours possible de tracer un cercle de centre donné et passant par un point donné. La géométrie euclidienne est donc la géométrie des droites et des cercles, donc de la règle et du compas. L'intuition d'Euclide était que tout nombre pouvait être construit, ou "obtenu", à l'aide de ces deux instruments.
Cette conjecture (erronée) va remettre en question la définition d'un nombre. En effet, les nombres rationnels (les fractions) ne suffisent pas à exprimer toutes les longueurs puisque la diagonale d'un carré de côté 1 est constructible, mais correspond au nombre $\sqrt{2}$ dont on peut démontrer qu'il ne peut pas s'écrire comme le rapport de deux entiers i.e qu'il n'est pas rationnel. Pourtant, on peut le construire à l'aide d'une règle et d'un compas.
On doit à Hippase de Métaponte la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Cette découverte choqua tellement la Grèce antique qu'on raconte qu'il fut jeter à la mer. En effet les nombres, comme le monde, ne pouvaient être que rationnels !
Pire on découvrira plus tard que certains nombres ne peuvent pas être obtenus à l'aide d'une règle et d'un compas ! C'est la cas de π notamment.

Pour ce qui est des coordonnées, elle arrive bien plus tard. Dans son ouvrage de 1637, René Descartes (1596-1650) propose de résoudre les problèmes de géométrie par le recours systématique au calcul algébrique.
A la même époque, Pierre de Fermat (1601-1665) est le premier à utiliser des coordonnées pour résoudre des problèmes de lieux géométriques.
Joseph Lagrange (1736-1813) souligne le fait plus d'un siècle plus tard : « Tant que l'Algèbre et la Géométrie ont été séparées, leurs progrès ont été lents et leurs usages bornées ; mais lorsque ces deux sciences se sont réunies, elles se sont prêtées des forces mutuelles et ont marché ensemble d'un pas rapide vers la perfection »

I) Constructions à la règle et au compas : concept

On se donne deux points O et I non confondus.

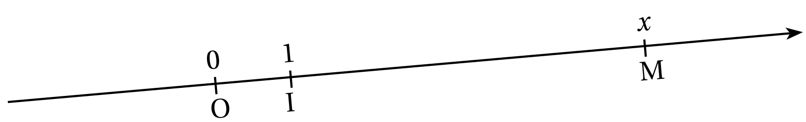
Définition 1.

On dit qu'un point du plan est **constructible à la règle et au compas** lorsqu'on peut le placer à partir de O et I, en utilisant uniquement une règle *non graduée* et un compas.

On trace la droite (OI), on l'oriente et on décide que :

- O est l'origine
- I donne l'unité sur cette droite (ainsi OI = 1 unité graphique en **abscisse**)

On obtient alors un repère (O,I) de dimension 1, car on peut décrire la position de tout point M sur la droite par son **abscisse** x, et ce, de manière unique.



Réciproquement, tous les nombres que vous connaissez correspondent à un unique point de cette droite.

Définition 2.

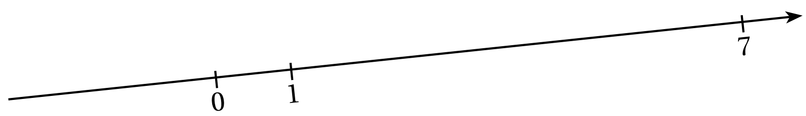
Les **nombres constructibles à la règle et au compas** sont les abscisses des points constructibles de cette même manière sur la droite (OI).

Question :

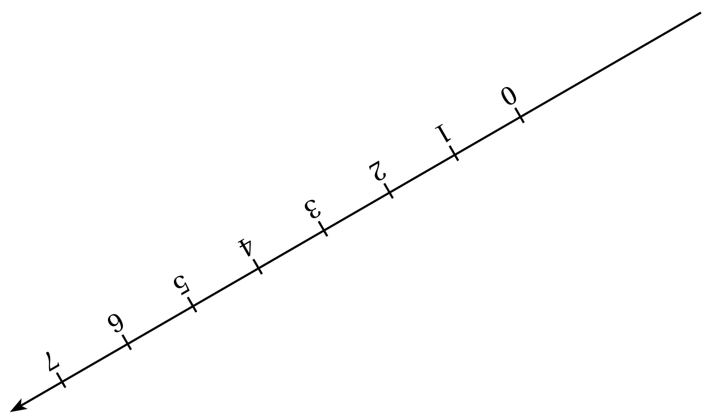
Quel type de nombres connaissez-vous ? Lesquels pensez-vous pouvoir construire ?

II) Les nombres entiers naturels

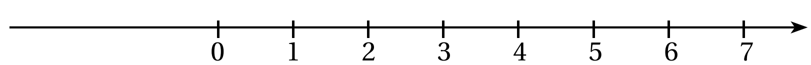
Construisons à l'aide d'une règle et d'un compas un segment de longueur 7. En ne se servant que du compas et en reportant 7 fois la longueur 1 il est simple d'obtenir la figure suivante :



En procédant de la même manière pour chacun des nombres entiers (positifs) on obtient :



Remarque : Pour plus de lisibilité, on prendra l'habitude de tracer (OI) horizontale et orientée de gauche à droite. Mais ce n'est pas obligatoire.



Définition 3.

L'ensemble des nombres **entiers naturels** se note $\mathbb{N}$ et désigne l'ensemble des nombres entiers positifs ou nul : $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$

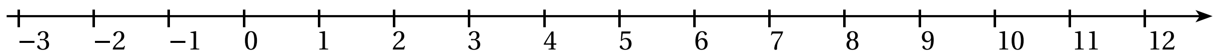
Question :

En combien d'étapes au minimum peut-on construire le nombre 7 ? Le nombre 10 ? Le nombre 100 ?

III) Les nombres entiers relatifs

III.1. Construction

En reproduisant le même procédé que pour les entiers naturels mais dans l'autre direction, on obtient les entiers négatifs :



Ainsi, nous pouvons graduer la droite de 1 en 1 d'un bout à l'autre. Nous pouvons construire n'importe quel entier relatif !

Définition 4.

L'ensemble des entiers relatifs se note $\mathbb{Z}$ et représente l'ensemble des nombres entiers positifs et négatifs. $\mathbb{Z} = \{\dots; -4; -3; -2; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

Attention !

Tous les entiers naturels sont des entiers relatifs.
On dit que $\mathbb{Z}$ contient $\mathbb{N}$, ou encore que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$. On note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
Le symbole $\subset$ ne doit pas être confondu avec $\in$. On utilise $\in$ lorsque un élément appartient à un ensemble, comme par exemple $2 \in \mathbb{Z}$. En revanche on utilise $\subset$ lorsque un ensemble tout entier est contenu dans un autre ensemble, comme par exemple $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Question :

En combien d'étapes au minimum peut-on construire le nombre -7 ? Le nombre -10 ? Le nombre -1000 ?

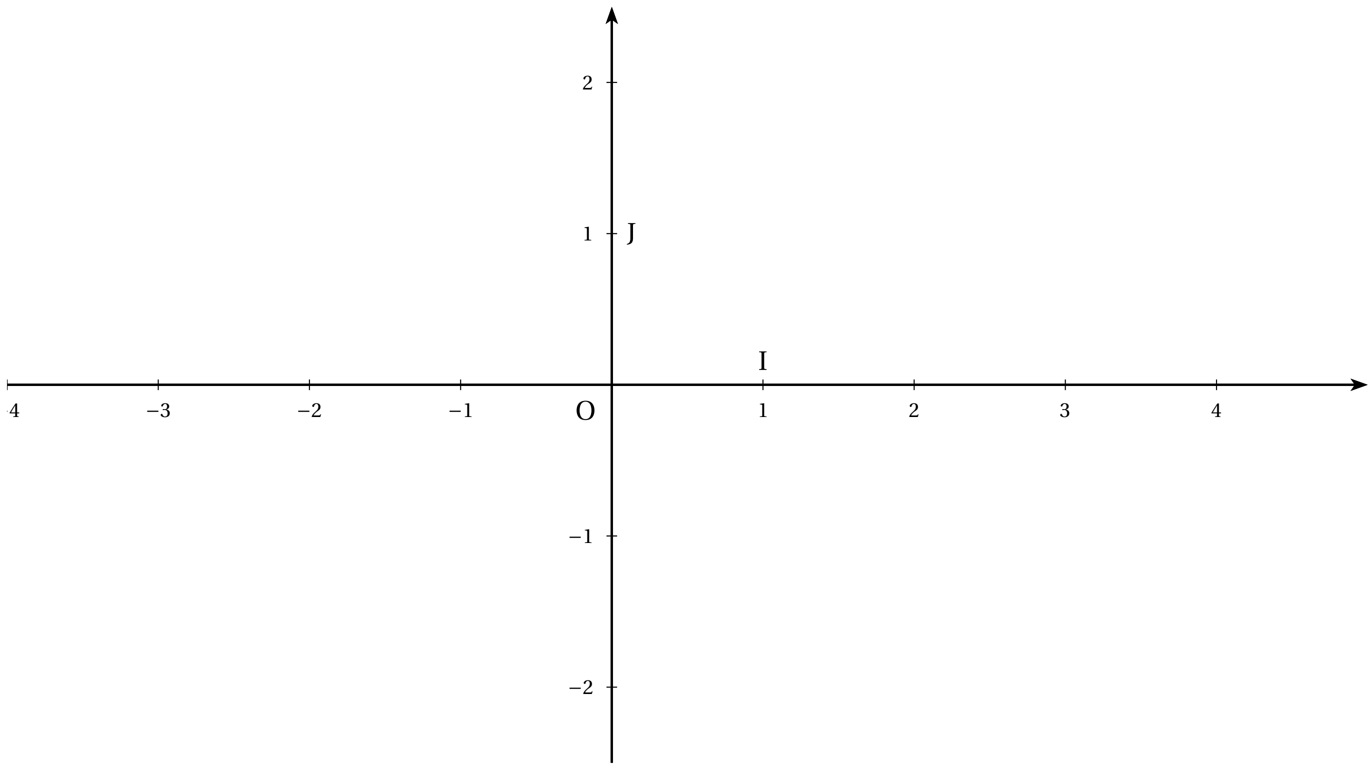
Exercice du Cours :

1. Calculer $(-1)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
2. Calculer $n \times (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

III.2. Application : Repérage dans le plan

III.2.a. Repère orthonormé

On sait donc contruire à la règle et au compas les graduations d'un repère de dimension 1.
Construisons désormais la perpendiculaire à (OI) passant pr O et graduons la avec la même unité que la droite (OI). *Il suffit de construire la médiatrice d'un segment bien choisi.*
On oriente en général cette droite vers le haut, mais ce n'est pas obligatoire.



Appelons J le point correspondant à l'unité 1 sur cette droite.

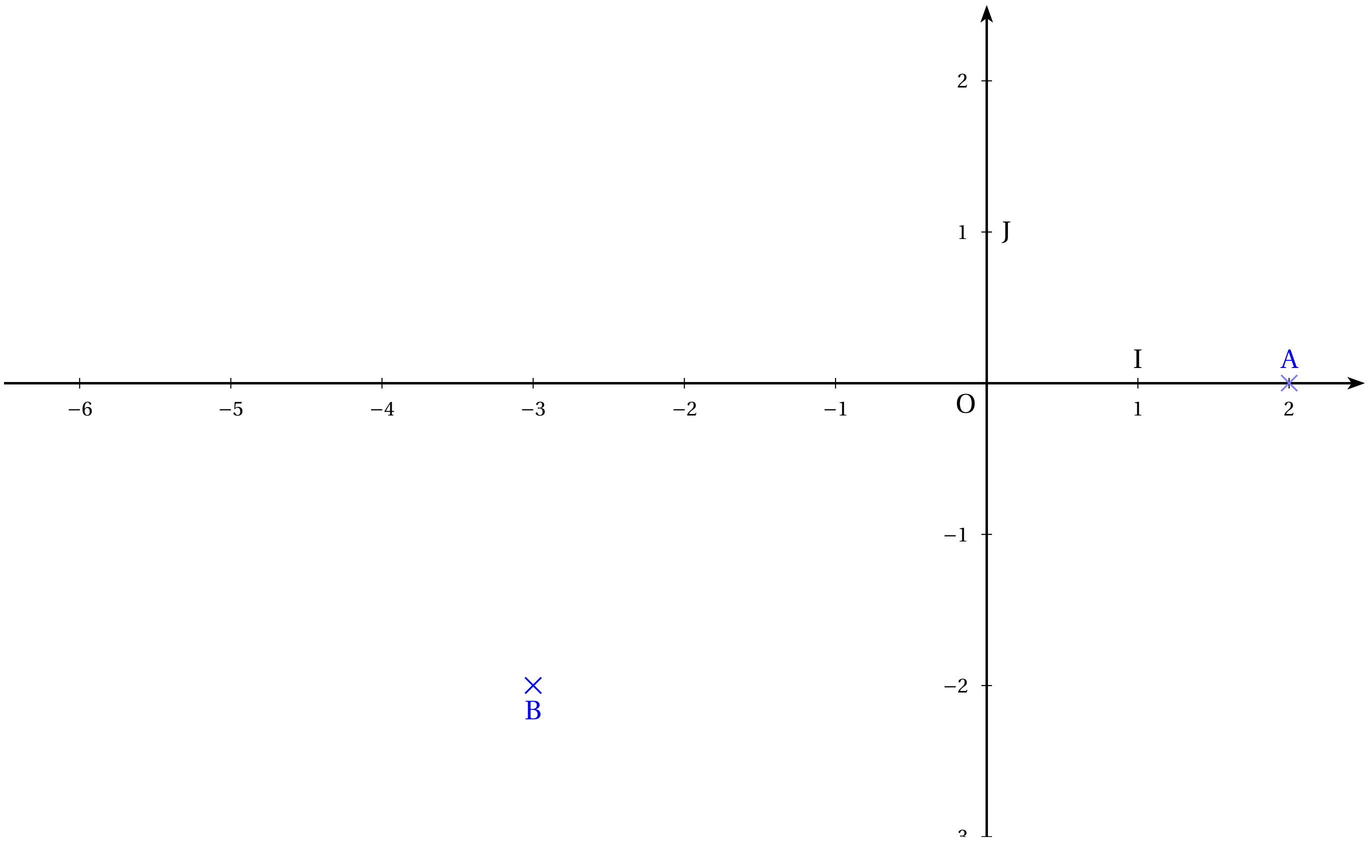
Nous venons de construire un **repère orthonormé** (O, I, J) du plan. En effet :

⇝ On parle de **repère** car :
- On peut décrire (*repérer*) la position de tout point M dans le plan par son **abscisse** x et son **ordonnée** y dans le repère (O, I, J), et ce, de manière unique.
- Réciproquement, tous les couples de nombres que vous connaissez correspondent à un unique point du plan.

On note la position d'un point (x, y) et on appelle ce couple les **coordonnées** de M.
L'ordre est important et dépend de l'ordre des points I *et* J *dans l'appellation du repère.*

⇝ On qualifie le repère d'**orthonormé** car :
- le préfixe « ortho » signifie que les axes sont perpendiculaires (ou orthogonaux)
- le suffixe « normé » signifie que les axes ont la même unité (ou norme) : $OI = OJ$

Exercice du Cours : Dans le repère orthonormé suivant, retrouver à la règle et au compas (si nécessaire) les coordonnées des points A et B et placer les points $C(-1,1)$ et $D(-5,3)$:

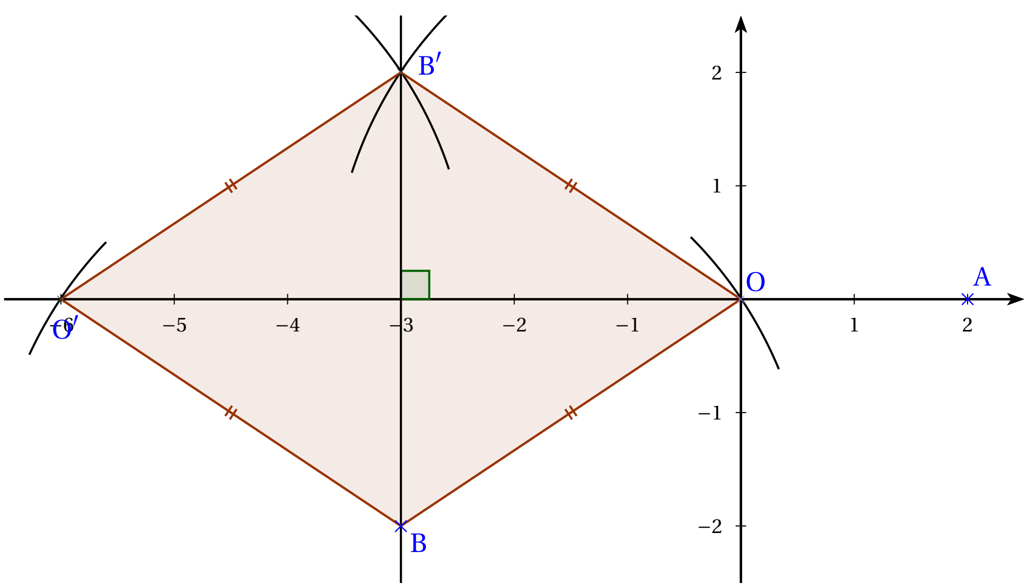


Solution :

On lit $A(2,0)$.

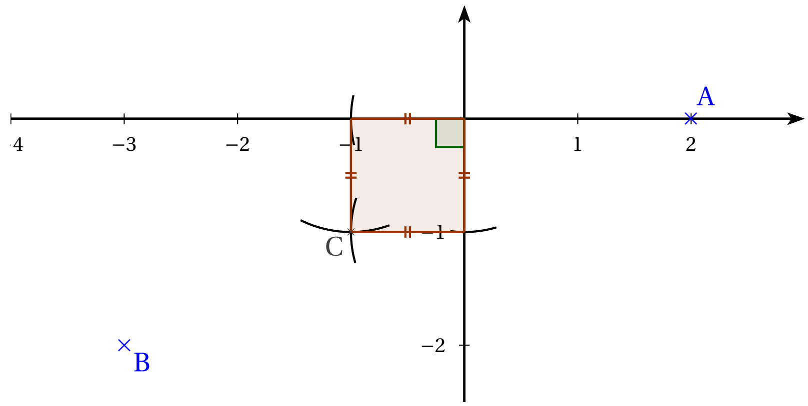
Ensuite, on construit cherche la perpendiculaire à (OI) passant par B.

Il suffit de construire au compas un losange de sommet B et dont l'un des diagonales est sur l'axe (OI), ie que deux autres de ses sommets sont sur (OI). Prenons par exemple O.



***Solution* :**

On lit $x_B = -3$. On fait de même avec (OJ) et on lit $y_B = -2$. Donc $B(-3; -2)$.
Pour placer le point C, on construit le carré de sommets opposés O et C.



Pour placer le point D, on construit le rectangle approprié.

Exercice 1 : Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(1.5, 3)$, $B(3, 4)$ et $C(0, -1)$.
Soit f la fonction affine définie pour tout réel x par : $f(x) = -2x + 6$.
On appelle d la droite représentant f.

1. **a.** Calculer $f(4)$. En déduire les coordonnées du point M appartenant à d d'abscisse 4.

   b. Quelle est l'image pas f du nombre -1 ? En déduire les coordonnées du point N appartenant à d d'abscisse -1.

   c. Tracer la droite d.

2. On note E et F les points d'intersection respectifs de d avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

   a. Lire les coordonnées de E et F.

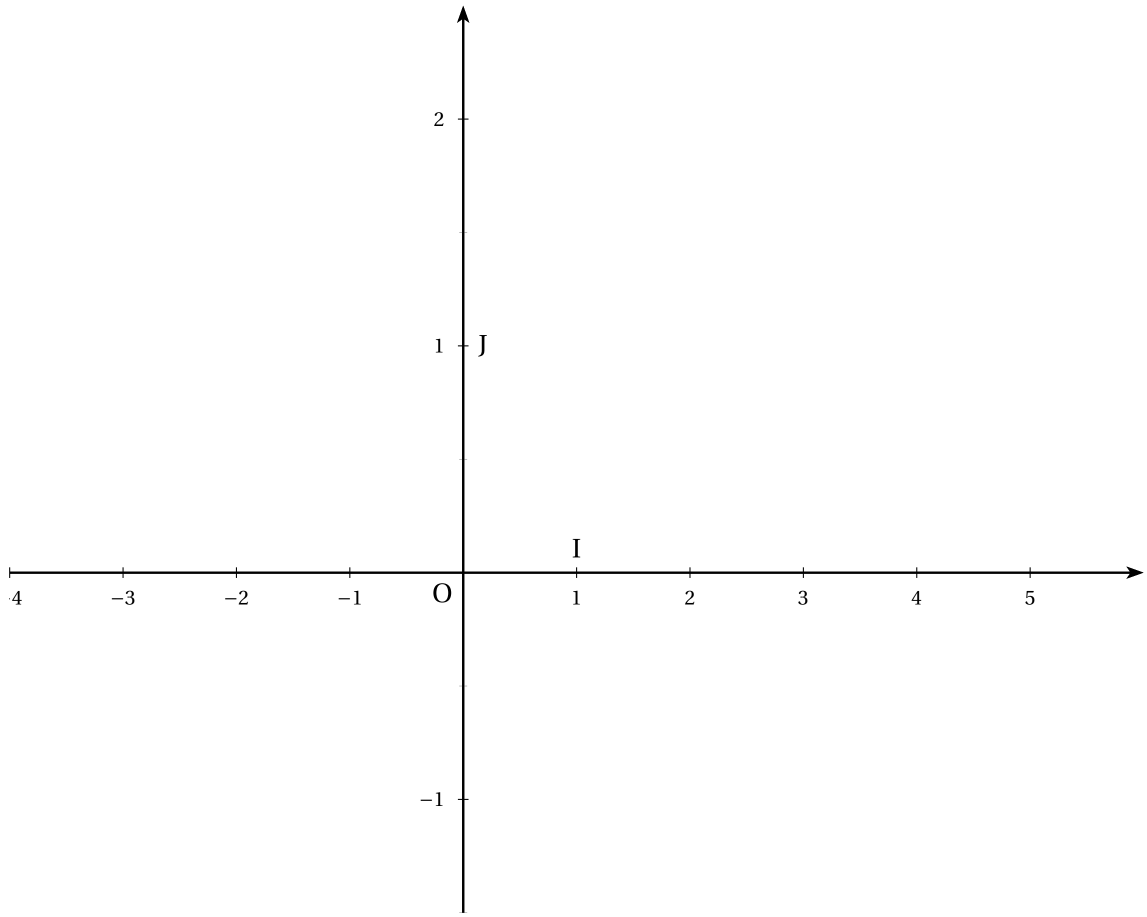
   b. Retrouver ces résultats par le calcul.

3. Justifier, sans calcul, que les droite (FC) et (BE) sont parallèles.

4. Les points F, A et E sont-ils alignés ?

III.2.b. Repère orthogonal

On peut également facilement choisir une autre unité sur l'axe (OJ). Par exemple, on peut choisir OJ = 2OI



Nous venons de construire un **repère orthognal** (O,I,J) du plan. En effet :

⇝ On peut encore repérer chaque point du plan par un unique couple de coordonnées (x, y), et chaque couple correspond à un unique point du plan.
(O,I,J) est donc un **repère** du plan.

⇝ On qualifie le repère d'**orthogonal** car ses axes sont orthogonaux (ou perpendiculaires). Cette fois, on ne précise rien sur les normes des axes (ou unité).

Exercice du Cours : Toutes les constructions sont à faire à la règle et au compas.

1. Construire un repère orthonormé (O,I,J) tel que $OI = OJ = 1$ cm.
2. Placer les points $A(-4,6)$, $B(-2,3)$, $C(2,0)$, $D(0,3)$ et $E(2,3)$.
3. Quelles sont les coordonnées des points A et B dans le repère (O,C,D) ? dans le repère (O,D,C) ?
4. Quelles sont les coordonnées du point O dans le repère (E,C,D) ? dans le repère (E,C,B) ?

Exercice 2 : Construire à la règle et au compas, deux repères du plan (O, I, J) possibles tels que (O, I, J) soit orthogonal et $OI = 2OJ$.

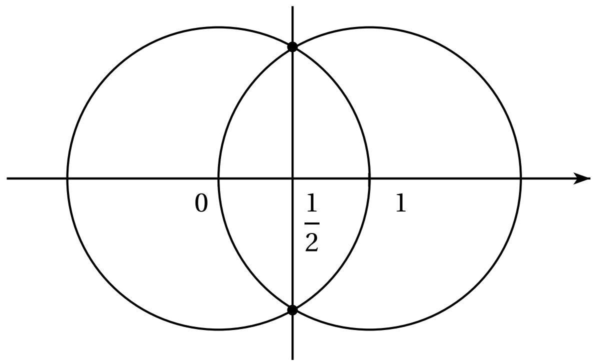
Remarque : Il serait donc intéressant d'orienter les angles, mais ce sera pour un autre chapitre.

Question :
Quel nouveau nombre venez-vous de construire à la règle et au compas ? Savez-vous en construire d'autres de ce type ?

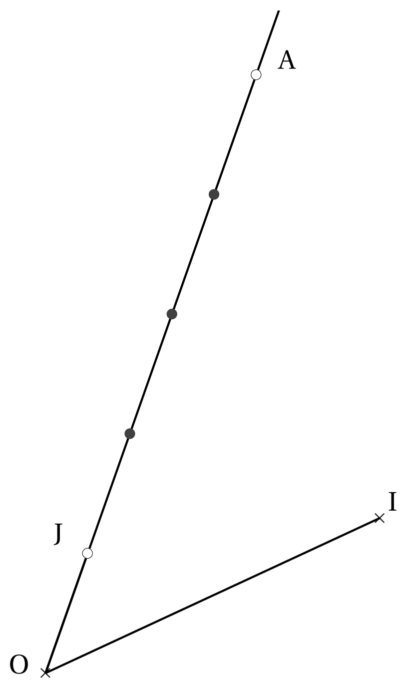
IV) Les nombres rationnels

IV.1. Construction

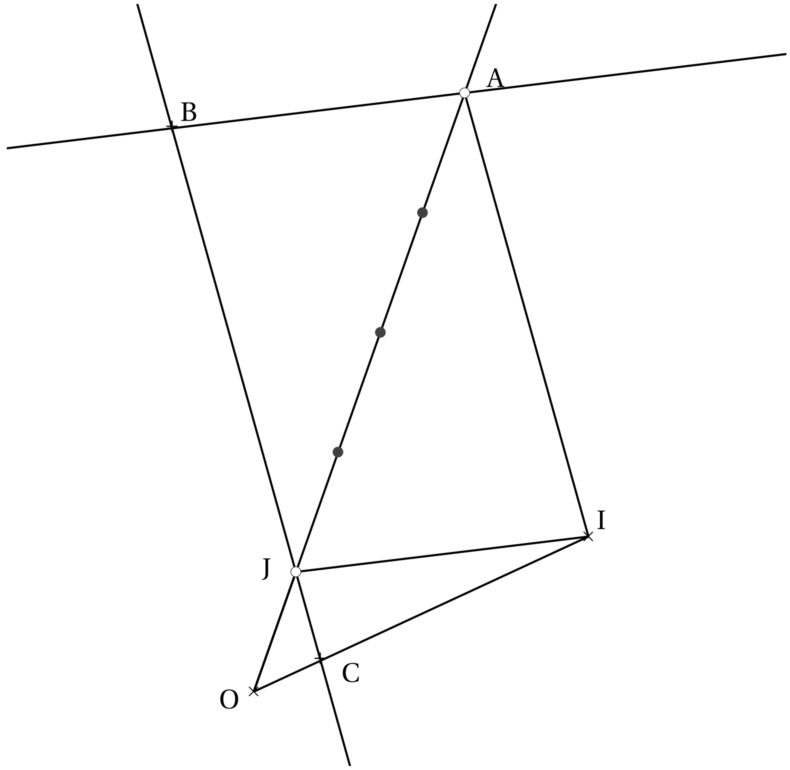
Nous pouvons placer $\dfrac{1}{2}$ en construisant à l'aide de la règle et du compas la médiatrice de [OI] :



Supposons que l'on souhaite à l'aide de la règle et du compas diviser le segment [OI] en 5. On va utiliser le théorème de Thalès, mais pour commencer on place n'importe où un point J et sur la demi-droite [OJ) on remporte 5 fois la longueur OJ :



On veut alors construire la parallèle à (AI) passant par J, car d'après Thalès, elle coupera le segment [OI] au cinquième de sa longueur.
Pour cela, on construit donc le parallélogramme AIJB au compas.
On a bien (AI)//(JB). On prolonge (JB), elle coupe [OI] en C.



Le théorème de Thalès nous assure alors que :

$$\frac{OC}{OI} = \frac{OJ}{OA} = \frac{1}{5} \Longleftrightarrow OC = \frac{1}{5}OI$$

On sait donc placer $\frac{1}{5}$ sur la droite graduée, et donc en reportant la longueur $\frac{1}{5}$ on peut placer $\frac{2}{5}$, puis $\frac{3}{5}$, etc...

Question :

En appliquant la méthode précédente construire à l'aide de la règle et du compas le nombre $\frac{5}{3}$.

Ainsi on sait construire n'importe quel quotient de deux nombres entiers.

Définition 5.

L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$ et représente l'ensemble des nombres pouvant s'écrire comme le quotient de deux entiers : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ où } a \in \mathbb{Z}\, et\, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$

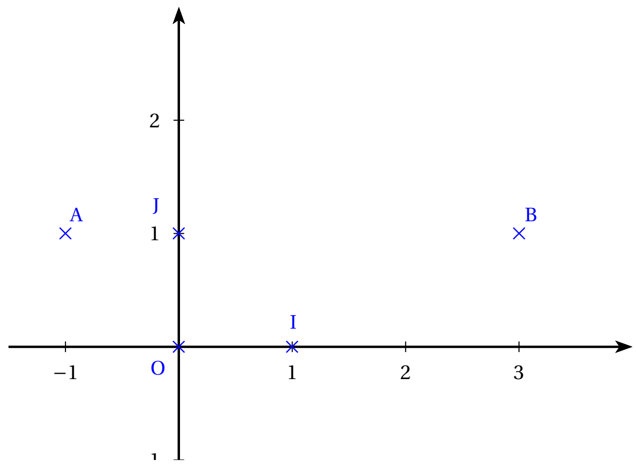
Remarque : Z^* représente l'ensemble des entiers relatifs privé de 0.
$b \in \mathbb{Z}^*$ car on ne peut pas diviser par 0.
Tous les entiers relatifs a peuvent s'écrire $a = \frac{a}{1}$, donc sont des rationnels. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

IV.2. Application : coordonnées du milieu d'un segment dans un repère du plan

Soit (O, I, J) un repère orthonormé du plan et deux points A et B de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B). On cherche à trouver une formule pour calculer les coordonnées du milieu K de [AB].

Travail de l'élève 1 :

PARTIE A : **Cas $y_A = y_B$**

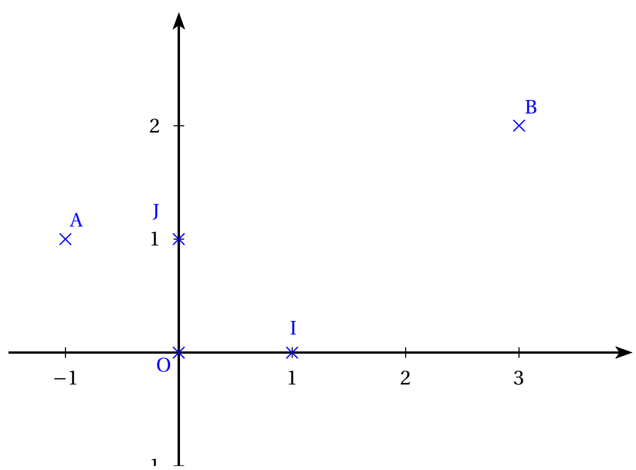


1. **a.** Placer le milieu K de [AB] au compas.
   b. Lire les coordonnées de A, B et K.
   c. Que constatez-vous ?
2. On cherche à démontrer notre constat.
   Pour cela, on note $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $K(x, y)$.
   De plus, on a $y_A = y_B$ et $x_A < x_B$.
   a. Expliquer pourquoi $y = y_A = y_B$.
   b. Exprimer la distance AK en fonction de x_A et x.
   c. Exprimer la distance BK en fonction de x_B et x.
   d. En déduire x.
3. Les formules trouvées changent-elles si $x_B < x_A$?

PARTIE B : **Cas $x_A = x_B$**

Faire un dessin et en s'inspirant de la partie A, écrire un énoncé qui permettrait de traiter le cas $x_A = x_B$.

PARTIE C : **Cas $x_A \neq x_B$ et $y_A \neq y_B$**



1. **a.** Placer le milieu K de [AB] au compas.
   b. Lire les coordonnées de A, B et K.
   c. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?
2. On cherche à démontrer notre constat. Pour cela, on note $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $K(x, y)$.
   De plus, on a $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$.
   a. Placer $D(x_B, y_A)$ et E le milieu de [AD].
      i. Déterminer les coordonnées de E.
      ii. Expliquer pourquoi (KE)//(BD).
      iii. En déduire x.
   b. Reproduire la méthode précédente pour déterminer y, en utilisant le milieu F de [BD].

   La démonstration des autres cas $x_A > x_B$ et/ou $y_B > y_A$ se traitent de même, et on retrouve les mêmes formules.

PARTIE D : **Récapitulatif**

1. Les formules trouvées dans la partie C sont-elles encore valables pour les cas $x_A = x_B$ et $y_A = y_B$?
2. Cette démonstration reste-t-elle valable si le repère n'est pas orthonormé ?

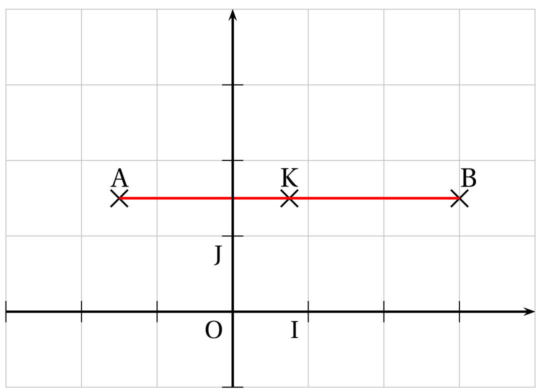
Propriété 1.

On considère dans le plan muni d'un repère (O, I, J) les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
Alors le milieu K du segment [AB] a pour coordonnées $K\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}; \dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$

Remarque : Il s'agit de la **moyenne** de chacune des coordonnées.

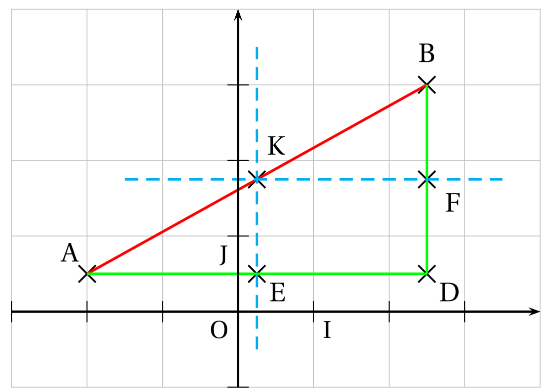
Illustrations dans un repère orthonormé :

$A\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$ et $B\left(3; \dfrac{3}{2}\right)$



$K\left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{3}{2}\right)$

$A\left(-2; \dfrac{1}{2}\right)$ et $B\left(\dfrac{5}{2}; 3\right)$



$K\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{7}{4}\right)$

Exercice du Cours : Le plan est rapporté à un repère (O, I, J). On considère les points $E(-3, \sqrt{2})$, et $F(2, -\sqrt{2})$.

1. Calculer les coordonnées du milieu A de [EF].
2. Calculer les coordonnées de B tel que E soit le milieu de [BF].

Question :

Peut-on contrôler les résultats à l'aide d'une figure à la règle et au compas ?

Exercice 3 : Dans un repère orthonormé d'origine O, on donne les points $A(-3;-4)$, $B(7;-4)$ et $C(5,2)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu K de [OB]
2. Calculer les coordonnées du milieu L de [AC]
3. Contrôler les résultats à l'aide d'une figure.

Exercice 4 : Dans un repère orthonormé, $A\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$, $B\left(2;\frac{3}{4}\right)$ et $C\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ sont trois points.

1. Calculer les coordonnées du milieu K de [AB].
2. Les points B et C sont-ils symétriques par rapport au point A ?

Exercice 5 : Dans un repère orthonormé d'origine O, on donne les points $A(2;5)$ et $B(-5;1)$.

1. Faire une figure.
2. Calculer les coordonnées du point M tel que O soit le milieu de [AM]
3. Calculer les coordonnées du point N tel que A soit le milieu de [BN]

Exercice 6 : Dans un repère orthonormé, on donne les points $R(-1;4)$, $S(5.5;-1.5)$, $T(4.5;3)$ et $U(0;-0.6)$.
Le quadrilatère RSTU est-il un parallélogramme ?

Exercice 7 : Dans un repère orthonormé, on donne les points $M(-1;2)$, $N(5,4)$ et $P(2;-3)$.

1. Calculer les coordonnées du point :
   - **a.** Q tel que MNPQ soit un parallélogramme.
   - **b.** R tel que MRNP soit un parallélogramme.
2. Démontrer que M est le milieu de [RQ] :
   - **a.** Avec les coordonnées.
   - **b.** Sans les coordonnées.

V) Les nombres réels

V.1. Définition

Vous connaissez d'autres nombres que ceux pouvant s'écrire sous la forme d'un quotient d'entiers.
Ainsi, c'est le cas de $\sqrt{2}$ (admis).
Par conséquent $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, de même que $\sqrt{3} \notin Q$, ou $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$, ou encore $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$. En revanche $\sqrt{4} = 2 = \dfrac{2}{1} \in \mathbb{Q}$.

Question :

Quel autre irrationnel n'étant pas une racinne carré connaissez-vous ?

***Solution* :**

π. On appelle ce nombre un nombre irrationnel transcendant !

Définition 6.

Les nombres ne pouvant pas s'écrire sous la forme de quotient d'entiers s'appellent les nombres **irrationnels**.
L'ensemble des nombres **réels** se note $\mathbb{R}$ et représente l'ensemble des nombres que vous connaissez aujourd'hui, à savoir la réunion des rationnels et des irrationnels [a].
Géométriquement, on peut représenter $\mathbb{R}$ par la droite (OI) entière (il n'y a pas de trou).
En effet, dans le repère (O, I), l'abscisse de n'importe quel point de la droite est un nombre réel et réciproquement.
C'est pourquoi on appelle parfois (OI) la **droite des réels**.

a. Il en existe bien d'autres, bien plus même. On les appelle les nombres **imaginaires** ou **complexes**.
Vous les découvrirez peut-être au lycée suivant votre orientation.

Propriété 2.

Tous les nombres rationnels sont réels. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

V.2. Construction des racines carré

Travail de l'élève 2 :

1. Suivre le protocole de construction suivant, **à la règle et au compas** :

a. Construire un repère orthonormé (O, I, J)

b. Dans ce repère, placer le point $A(-1, 0)$ et $B(7, 0)$.

c. Déterminer par le calcul les coordonnées du milieu K de [AB] puis le placer.

d. Tracer un demi-cercle $\mathscr{C}$ de centre K et de diamètre [AB].

e. On appelle C le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe (OJ).
Tracer le triangle ABC

STOP PROF

2. Recherche de la longueur [OC] :

a. Donner les longueurs OA, OB et AB.

b. Trouver les trois triangles rectangles tracés dans cette figure.

c. En déduire les trois égalités de Pythagore correspondantes.

d. En déduire OC.

STOP PROF

3. Adapter le protocole de la question 1 pour construire $\sqrt{10}$

V.3. What about π ? ?

Certains nombres, comme π, sont irrationnels et on sait qu'ils sont non constructibles à la règle et au compas. Il n'existe aucune construction permettant d'obtenir un segment de longueur π en utilisant juste une règle et un compas. Mais ce résultat est bien trop complexe pour être développé en classe de seconde.

V.4. Application : distance dans un repère orthonormé du plan

Travail de l'élève 3 : Soit (O,I,J) un repère **orthonormé** du plan et deux points $A(-2,1)$ et $B(3,4)$.
On cherche une méthode pour calculer la distance AB.

1. Construire la figure à la règle et au compas.
2. Tracer la parallèle à (OI) passant par A, puis la parallèle à (OJ) passant par B.
   Elles se coupent en C.

STOP PROF

3. Lire les coordonnées de C.
4. Donner les longueurs AC et BC.
5. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.
6. En déduire la longueur AB.

STOP PROF

7. On donne cette fois deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.
   Conjecturer une formule donnant la longueur AB en fonction des coordonnées de A et B.

Propriété 3.

On considère un repère **orthonormé** (O,I,J) du plan et les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. On a

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Autrement dit, la distance entre les points A et B est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

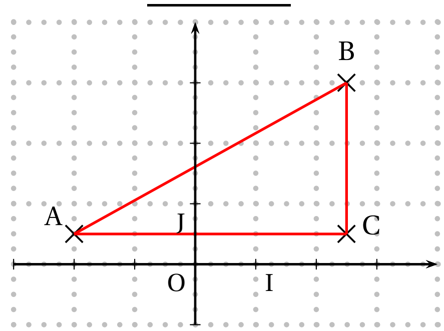
(l'unité de longueur étant celle commune aux deux axes)

Exemple :

Avec $A\left(-2; \dfrac{1}{2}\right)$ et $B\left(\dfrac{5}{2}; 3\right)$

$$\begin{aligned}
AB^2 &= \left(\frac{5}{2} - (-2)\right)^2 + \left(3 - \frac{1}{2}\right)^2 \\
&= 4.5^2 + 2.5^2 \\
&= 26.5 \\
AB &= \sqrt{26.5} \simeq 5.1
\end{aligned}$$

Illustration :



Exercice du Cours : Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-1,1)$, $B(3,2)$, $C(-2,5)$ et $D(2,6)$.
Démontrer dans l'ordre que ABCD est :
∗ un parallélogramme ∗ un losange ∗ un rectangle ∗ un carré

Exercice 8 : Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-3,-2)$ et $B(5,2)$. Calculer la distance AB.

Exercice 9 : Dans un repère orthonormé, on considère les points $M(3,-2)$, $N(-2,-3)$ et $P(-4,3)$.
Le triangle MNP est-il rectangle ?

Exercice 10 : Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-5,-2)$, $B(-4,-3)$, $C(-4,-5)$ et $D(3,-1)$.

1. Calculer les longueurs DA, DB, DC.
2. Que peut-on en déduire ?

Exercice 11 : Dans repère orthonormé (O,I,J) du plan, on donne les points $A(-3,0)$, $B(5,-1)$, $C(9,6)$ et $D(1,7)$.

1. Démontrer que les segments [AC] et [BD] ont même milieu.
   Que peut-on en déduire sur la nature du quadrilatère ABCD ?
2. Calculer les longueurs AB et BC.
   Que peut-on en déduire sur la nature du quadrilatère ABCD ?
3. Le quadrilatère ABCD est-il un carré ?

Exercice 12 : **Vrai ou Faux ?**

Dans un repère orthonormé (O,I,J), on considère les points $A(-1,3)$, $B(5,7)$, $C(19,30)$ et $D(5,-5)$.

1. Le point D appartient au cercle de centre A et de rayon 10.
2. Le triangle DAB est isocèle.
3. Le point C appartient à la médiatrice de [AB].

Exercice 13 : **Algo**

On se place dans un repère orthonormé. Pour deux points A et B, on souhaite automatiser le calcul de la longueur AB.
Quel(s) est (sont) le(s) algorithme(s) correct(s) ?

Algorithme 1 :

Entrée(s) :
x_A, y_A, x_B et y_B sont des nombres réels.
Variable(s) :
c et d sont des nombres réels.
Début
$c := (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$
$d := \sqrt{c}$
Renvoyer d.
Fin

Algorithme 2 :

Entrée(s) :
x_A, y_A, x_B et y_B sont des nombres réels.
Variable(s) :
c et d sont des nombres réels.
Début
$c := (x_B - y_B)^2 + (x_A - y_A)^2$
$d := \sqrt{c}$
Renvoyer d.
Fin

Algorithme 3 :

Entrée(s) :
x_A, y_A, x_B et y_B sont des nombres réels.
Variable(s) :
c et d sont des nombres réels.
Début
$c := (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$
$d := \sqrt{c}$
Renvoyer d.
Fin

Ecrire sur le même principe un algorithme pour calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
Pour aller plus loin : Programmer les algorithmes sur votre calculatrice.

Exercice 14 : Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O,I,J).
On considère les points $A(-5,2)$ et $B(2,y)$. Déterminer les valeurs de y dans les cas suivants :

$AB = 7$ $\qquad AB = 7\sqrt{2}$ $\qquad OA = OB$ $\qquad$ B appartient à la médiatrice de [IJ].

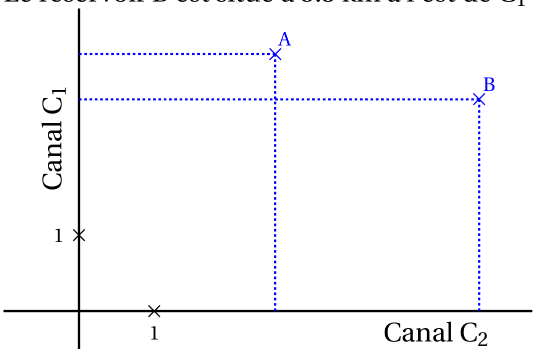
Exercice 15 : Dans un repère orthonormé (O,I,J), placer les points $A(-2,0)$ et $B(2,2)$. **Cactus**

La perpendiculaire à la droite (AB) en B coupe l'axe (IJ) en C et l'axe (OI) en D.

1. Placer les points C et D.
2. Déterminer les coordonnées de C et D par le calcul

Exercice 16 : Dans un repère orthonormé (O, I, J), placer les points $A(2,5)$ et $B(4,1)$. **Cactus**
Existe-t-il un ou des points C de l'axe des ordonnées tels que ABC soit isocèle en A ?

Exercice 17 : On veut approvisionner en eau deux réservoirs A et B. **Problème ouvert**
Pour cela, on peut les relier par des tuyaux à deux canaux d'irrigation C_1 et C_2, perpendiculaires entre eux.
Le réservoir A est situé à 2.6 km à l'est de C_1 et à 3.4 km au nord de C_2.
Le réservoir B est situé à 5.3 km à l'est de C_1 et à 2.8 km au nord de C_2.



On peut :

- soit relier chaque réservoir à un des deux canaux,
- soit relier un réservoir à un des deux canaux et approvisionner le second réservoir en le reliant au premier.

Bien entendu, chaque liaison envisagée sera effectuée en ligne droite.

1. Coder la figure ci-contre.
2. Déterminer la longueur minimale de tuyau nécessaire.

Exercice 18 : Démontrer que si ABC est un triangle isocèle en A, alors il a deux médianes de même longueur [a]
Réciproquement, démontrer que si un triangle a deux médianes de même longueur, alors il est isocèle.

(a). On pourra utiliser un repère orthonormé d'origine I, milieu de [BC].

VI) En Bref

Résumé sur les ensembles de nombres

L'ensemble des nombres **entiers positifs ou nuls** se note $\mathbb{N}$. On a

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \ldots\}$$

Les éléments de $\mathbb{N}$ sont les **entiers naturels**.

L'ensemble des nombres **entiers positifs et négatifs** se note $\mathbb{Z}$. On a

$$\mathbb{Z} = \{\ldots; -4; -3; -2; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$$

Les éléments de $\mathbb{Z}$ sont les **entiers relatifs**.

L'ensemble des nombres pouvant s'écrire comme le **quotient de deux entiers** se note $\mathbb{Q}$. On a

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ où } a \in \mathbb{Z}\, et\, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont les **rationnels**.

L'ensemble des **nombres connus en seconde** (rationnels et irrationnels) se note $\mathbb{R}$.
Les éléments de $\mathbb{R}$ sont les **réels**.
On a :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Résumé sur le repérage

Trois points *non alignés* O, I et J définissent un **repère** du plan, noté (O, I, J) :

- ⇝ Le premier point indique l'**origine** du repère : O
- ⇝ Le deuxième point indique l'unité sur l'axe des **abscisses** : $OI = 1$ dans la direction de (OI)
- ⇝ Le troisième point indique l'unité sur l'axe des **ordonnées** : $OJ = 1$ dans la direction de (OJ)

Si les axes (OI) et (OJ) sont *perpendiculaires*, alors le repère est dit **orthogonal**
Si les axes (OI) et (OJ) sont *perpendiculaires* et $OI = OJ$ alors le repère est dit **orthonormé**.

Dans un repère (O, I, J) du plan, on donne les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. Alors :

- ⇝ Le milieu K du segment [AB] a pour coordonnées

$$K\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

- ⇝ Si le repère est orthonormé, la distance AB vaut

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$