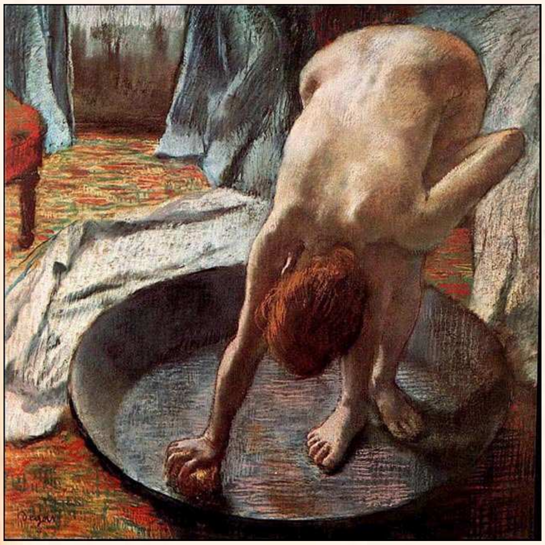
## Chapitre 10

# Paraboles et Hyperboles

## Hors Sujet



**Titre** : « Autoportrait (1863) » et « Le Tub (1885) »

**Auteur** : Edgar Degas

**Présentation succinte** : Edgar Degas (1834-1917) est un peintre français, en général rattaché au mouvement impressionniste, formé à la fin du XIXe siècle, en réaction à la peinture académique de l'époque.

Sa carrière fut dès le départ influencée par les danseuses. En 1874, il commence à se faire connaître, les critiques louant ou dénigrant le réalisme de son travail. Il explore des thèmes comme les repasseuses ou les femmes à leur toilette, multipliant les points de vue audacieux, recherchant des effets lumineux et colorés. Il dit d'ailleurs à propos de ses nus : « Jusqu'à présent, le nu avait toujours été représenté dans des poses qui supposent un public. Mais mes femmes sont des gens simples... Je les montre sans coquetterie, à l'état de bêtes qui se nettoient. »

A partir des années 1880, Degas va aussi poser la question d'une sculpture « impressionniste », réalisant des modèles en cire peints au naturel, qu'il accessoirise ensuite. Seule *La Grande Danseuse* (cf première page) fut présenté de son vivant, les autres modèles l'aidant surtout dans ses peintures. Cette incarnation de la grâce et de l'innocence trahit en réalité la fascination de Degas pour la criminalité. En effet, avec son visage est sculpté sur le modèle des physionomies de criminels définies à l'époque, et la danseuse était un parfait « petit rat », transmettant la syphilis aux bourgeois venant la voir ...

Document réalisé à l'aide de LaTeX
**Auteur** : C. Aupérin
**Site** : wicky-math.fr.nf
**Lycée Jules Fil** (Carcassonne)

# Table des matières



**L'ESSENTIEL :**

- $\rightsquigarrow$ Découvrir deux nouveaux types de courbes et les fonctions associées
- $\rightsquigarrow$ Connaître les trois formes possibles d'une fonction de degré 2
- $\rightsquigarrow$ Savoir l'utilité de chacune et les utiliser à bon escient
- $\rightsquigarrow$ Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction homographique

« *Quand quelqu'un paye un tableau* 3000 *francs, c'est qu'il lui plaît.*
*Quand il le paye* 300000 *francs, c'est qu'il plaît aux autres.* »
EDGAR DEGAS

# CHAPITRE 10:

# PARABOLES ET HYPERBOLES

### Au fil du temps

Nous avons déjà entrevu ce que sont les fonctions dans un cadre général, ainsi que le vocabulaire associé à cette notion et utile pour décrire les comportements des fonctions.
Dans ce chapitre, nous allons revoir tout cela (ensemble de définition, variations, signe, courbe représentative) mais en nous concentrant sur certaines fonctions dites « de référence » . Ces fonctions portent ce nom car leur expression algébrique est simple, ce qui les rend simples à étudier, et car grâce à elles et leurs propriétés, nous pourrons étudier par la suite des fonctions bien plus complexes, construites à partir de celles-ci.

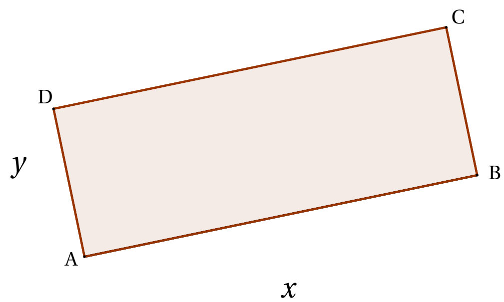
Dans tout le chapitre, on se place dans un repère orthonormé du plan.

# I ) Fonctions polynômes de degré 2

## I.1. Problème d'introduction

**Problème :**

On connait l'aire $\mathscr{A} = 10$ cm$^2$ et le périmètre $\mathscr{P} = 16$ cm d'un rectangle. Peut-on déterminer les longueurs des côtés de ce rectangle.




***Solution* :**

Si on note $x$ et $y$ les longueurs des deux côtés cherchés alors :

$$xy = 10 \qquad \text{et} \qquad x + y = 8 \Longleftrightarrow y = 8 - x$$

Ainsi $x(8-x) = 10 \Longleftrightarrow 8x - x^2 = 10 \Longleftrightarrow x^2 - 8x + 10 = 0 \qquad (\star)$.

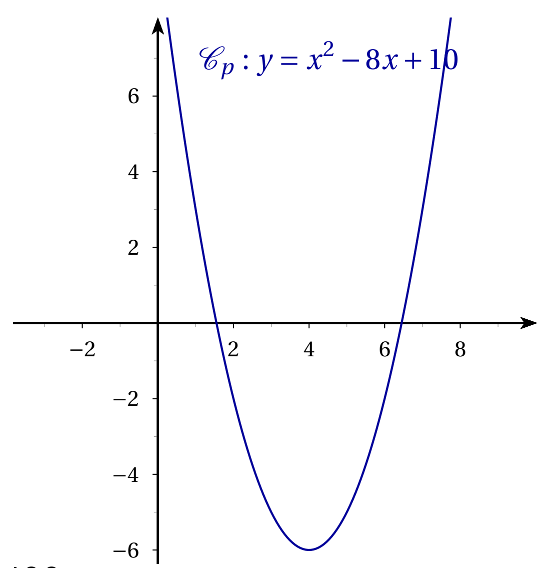
En posant $\mathrm{P}(x) = x^2 - 8x + 10$, on est amené à rechercher les éventuels antécédents de 0 par la fonction P.

**Graphiquement** :

A l'aide de la calculatrice et de la représentation graphique de la fonction P on peut déjà avoir une idée de la réponse.

0 a deux antécédents par P, qui sont approximativement 1,5 et 6,5.

Si $x = 1,5$ et $y = 6,5$, on obtient $xy = 9,75$ et $x + y = 8$, ce qui semble être une bonne approximation.




Mais ne pourrait-on pas trouver les solutions exactes par le calcul ? ?

**Par le calcul :**

En utilisant la deuxième identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ pour $a = x$ et pour $b = 4$ on obtient :

$$(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$$

Par conséquent

$$x^2 - 8x + 10 = (x-4)^2 - 6$$

Ce constat permet de réécrire l'équation $(\star)$ :

$$(x-4)^2 - 6 = 0$$

Utilisons pour résoudre cette équation la troisième identité remarquable, $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, avec $a = (x-4)$ et $b = \sqrt{6}$, l'équation devient alors :

$$(x-4-\sqrt{6})(x-4+\sqrt{6}) = 0 \Longleftrightarrow x-4-\sqrt{6} = 0 \quad \text{ou} \quad x-4+\sqrt{6} = 0$$

On trouve alors deux solutions possibles pour $x$ :

$$x = 4+\sqrt{6} \quad \text{ou} \quad x = 4-\sqrt{6}$$

Pour chacune de ces deux solutions correspond une valeur pour $y$, on utilise le fait que $y = 8 - x$ et on trouve :

$$y = 8 - \left(4+\sqrt{6}\right) = 4-\sqrt{6} \quad \text{ou} y = 8 - \left(4-\sqrt{6}\right) = 4+\sqrt{6}$$

Dans les deux cas les dimensions du rectangle sont donc $4+\sqrt{6} \simeq 6.45$ pour la longueur et $4-\sqrt{6} \simeq 1.55$ pour la largeur.

*Vérification* :

$x + y = 4+\sqrt{6}+4-\sqrt{6} = 8$ ce qui est bien le demi-périmètre.

$xy = (4+\sqrt{6})(4-\sqrt{6}) = 4^2 - 6 = 10$ ce qui est bien l'aire.

**Propriété 1.**

Pour tout ce chapitre et pour le bien des mathématiques il est indispensable de connaître les trois identités remarquables :

Pour tout nombre réel $a$ et $b$ on a :

*Carré d'une somme* : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

*Carré d'une différence* : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

*Produit entre la somme et la différence de deux nombres* : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Vérifier la validité de ces trois égalités pour $a = 5$ et $b = 7$.

## I.2. Forme développée

Dans toute cette partie, $a$, $b$ et $c$ désignent des réels fixés avec $a \neq 0$.

**Définition 1.**

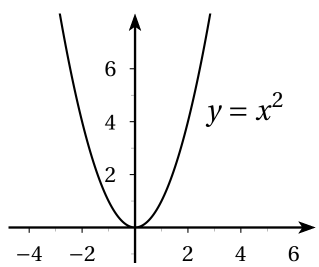
Une fonction $\mathrm{P}$ est dite fonction polynôme de degré 2 si et seulement si il existe trois nombres réels $a$, $b$ et $c$ avec $a \neq 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait :

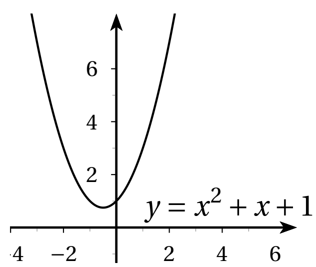
$$\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$$

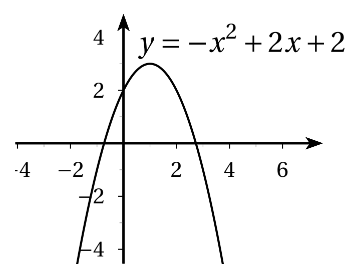
On appelle cette écriture la **forme développée** de $f$.
On appelle **parabole** la représentation graphique d'une telle fonction. Une parabole a donc une équation du type $y = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

### Exemples :

- La fonction $\mathrm{P}$ définie par $\mathrm{P}(x) = x^2 - 8x + 10$ est une fonction polynôme de degré 2 avec $a = 1$, $b = -8$ et $c = 10$.
  Le point $\mathrm{A}(2,3)$ n'appartient pas à la parabole à la parabole représentative de $\mathrm{P}$ car $2^2 - 8 \times 2 + 10 \neq 3$.
  Par contre, le point $\mathrm{B}(2,-2)$ si, car ses coordonnées vérifient l'équation de la parabole.
- $\mathrm{P}(x) = x^2$ est une fonction polynôme de degré 2. Ici $a = 1$, $b = 0$ et $c = 0$.
  On l'appelle **la fonction carré**.
- De même $\mathrm{Q}(x) = x^2 + x + 1$ est une fonction polynôme de degré 2 obtenue avec $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$,
- Tout comme $\mathrm{K}(x) = 2x + 2 - x^2$ avec $a = -1$, $b = 2$ et $c = 2$.




Sur Géogébra, avec trois curseurs que l'on fait varier pour les coefficients, émettre diverses conjectures :

- Allure globale d'une parabole (variation, sommet, symétrie)
- $a = 0$ ?
- Influence de chaque coefficient ?
- Signe ?
- Utilité de la forme développée ?

**Remarques :**

- Si $a = 0$, la fonction est affine (polynôme de degré 1) et sa représentation graphique est une droite.
- L'équation d'une courbe est une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées $(x; y)$ d'un point pour qu'il appartienne à la courbe.
- Tout comme les fonctions affines sont les seules fonctions représentées par des droites, les fonctions polynôme de degré 2 sont les seules représentées par des paraboles (et cette fois, toute parabole représente une fonction polynôme de degré 2).
- Les paraboles présentent une symétrie par rapport à une droite et un sommet, tantôt ce sommet est un « maximum », tantôt « un minimum ».
  Le but de ce chapitre est de trouver des règles i.e. des théorèmes pour savoir dans quel cas on se trouve.

### Conclusion

La forme développée d'une fonction $\mathrm{P}$ polynôme de degré 2 est pratique pour :

- déterminer l'image de $0$ : $\mathrm{P}(0) = c$.
- déterminer les antécédents éventuels de $c$ :

$$\mathrm{P}(x) = c \Longleftrightarrow ax^2 + bx = 0 \Longleftrightarrow x(ax+b) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b}{a}$$

**Exercice du Cours** : On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)(x+2)$.

1. Démontrer que $f$ est une fonction polynôme de degré $2$.
2. Calculer l'image de $0$ par $f$.
3. Déterminer les antécédents éventuels de $-2$ et de $0$ par $f$.

## I.3. Forme canonique

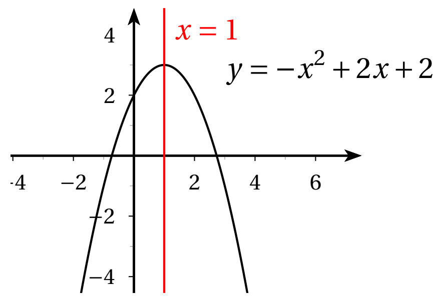
### I.3.a. Recherche du sommet

**Propriété 2.** (Admis)

Toute parabole admet un axe de symétrie et un sommet.
Cet axe est une droite parallèle à l'axe des ordonnées d'équation $x = \alpha$ où $\alpha$ est un nombre réel à déterminer, qui est aussi l'abscisse du sommet $S$.

**Exemple :**

Si $Q(x) = -x^2+2x+2$ la courbe semble avoir pour sommet $S(1;3)$ et être symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1$ :




**Comment le retrouver par le calcul ??** :

- On détermine les antécédents de $c = 2$.

$$Q(x) = 2 \iff -x^2+2x+2 = 2 \iff x(-x+2) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

- Les nombres 0 et 2 ont la même image par conséquent leur moyenne est sur l'axe de symétrie et

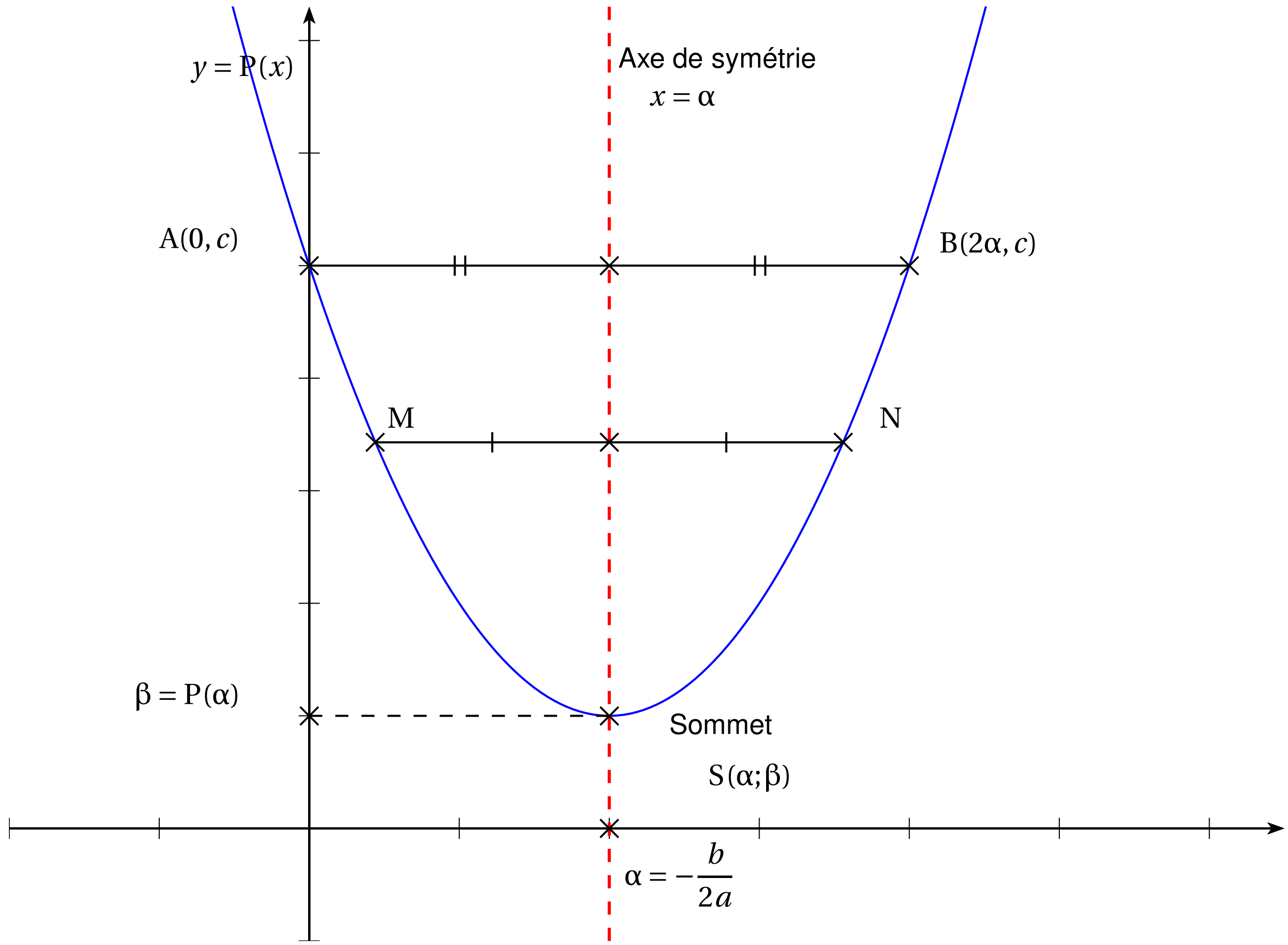
$$\alpha = \frac{0+2}{2} = 1$$

- L'abscisse du sommet $S$ de cette parabole est donc 1, son ordonnée est $P(1) = -1+2+2 = 3$ ce qui implique que $S(1;3)$ et que la parabole est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1$.

***Méthode***

Si $P(x) = ax^2+bx+c$. Pour déterminer les coordonnées du sommet $S$ de la parabole :

- On cherche les deux antécédents de $c$, notons les $x_1$ et $x_2$.
- L'abscisse de $S$ est alors $\alpha = \dfrac{x_1+x_2}{2}$. *On constate qu'en fait* $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$
- L'ordonnée de $S$ est alors l'image de $\alpha$ par la fonction $P$ i.e. $\beta = P(\alpha)$.
- On déduit que la droite d'équation $x = \alpha$ est l'axe de symétrie de la parabole et $S(\alpha;\beta)$ est le sommet de la parabole.




**Remarque :** Si deux points de la parabole M et N d'abscisse $x_1$ et $x_2$ ont la même ordonnée, alors le sommet S a pour abscisse $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

### I.3.b. Ecriture

Dans la suite du cours, P désigne un polynôme de degré 2, de forme développée :

$$\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$$

avec $a$, $b$ et $c$ trois réels et $a \neq 0$.

**Théorème 1.**

Il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ uniques tels que pour tout réel $x$, on a

$$\mathrm{P}(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Cette écriture s'appelle la forme **canonique**.
De plus, $\mathrm{S}\left(\alpha;\beta\right)$ est le sommet de la parabole représentant P.
Et $x = \alpha$ est l'équation de son axe de symétrie.

**Remarques :**

- Dans une forme canonique, l'inconnue ne figure qu'une fois, ce qui en fait l'un de ses intérêts.
- Il est clair que si $S(\alpha;\beta)$ est le sommet de la parabole, alors on a $\beta = P(\alpha)$.
  De plus, on a déjà remarqué en exercice que l'équation de l'axe de symétrie était $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- Le premier intérêt de la forme canonique est donc de déduire un extremum de la fonction $f$.

## *Preuve*

**Existence de $\alpha$ et $\beta$ :** Prenons $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$. Alors

$$\begin{aligned}\beta = P(\alpha) &= P\left(-\frac{b}{2a}\right)\\ &= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\times\left(-\frac{b}{2a}\right)+c\\ &= a\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c\\ &= \frac{b^2}{4a}-\frac{2b^2}{4a}+c\\ &= -\frac{b^2}{2a}+c\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}a(x-\alpha)^2 &= a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2\\ &= a\left(x^2-2\times\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)\\ &= ax^2-a\times\frac{b}{a}x+a\frac{b^2}{4a^2}\\ &= ax^2-bx+\frac{b^2}{4a}\end{aligned}$$

Ainsi

$$a(x-\alpha)^2+\beta = ax^2-bx+\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c = ax^2+bx+c = P(x)$$

**Sommet** : Il est clair que $S\big(\alpha;\beta\big)$ avec $\beta = P(\alpha)$ est sur la parabole $\mathscr{C}$ représentative de $P$.
De plus, pour tout réel $x$ on a $(x-\alpha)^2 \geq 0$ car il s'agit d'un carré. Ainsi :

Si $a>0$ : $a(x-\alpha)^2 \geq 0$

$a(x-\alpha)^2+\beta \geq \beta$

$\Longrightarrow \beta$ est le minimum de $P$

Si $a<0$ : $a(x-\alpha)^2 \leq 0$

$a(x-\alpha)^2+\beta \leq \beta$

$\Longrightarrow \beta$ est le maximum de $P$

Donc le point de coordonnée $(\alpha;\beta)$ est bien le sommet de $\mathscr{C}$.

**Unicité du $\alpha$ :** Comme le sommet de la parabole est unique, $\alpha$ et $\beta$ aussi.

**Axe de symétrie :** L'axe de symétrie est parallèle à l'axe des ordonnées et passe par le sommet de $\mathscr{C}$, donc il a pour équation $x = \alpha$.

**Exercice du Cours** : Vérifier les égalités données et en déduire les sommets des paraboles. $3x^2-12x+5 = 3(x-2)^2-7$ et $-2x^2-2x = -2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$

Pour la première parabole, le sommet est $S(2,-7)$.

Pour la seconde, le sommet est $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

Sur Géogébra, avec trois curseurs $a$, $\alpha$ et $\beta$ que l'on fait varier, émettre diverses conjectures :

- Influence de chaque coefficient ?
- Sommet et axe de symétrie ?
- Variations ?

**Exercice du Cours** : Déterminer la forme canonique de $P$ sachant que

$$P(x) = -2x^2 + 3x + 1$$

**Pour déterminer la forme canonique de $P$ il s'agit de trouver les coordonnées du sommet de la parabole qui représente la fonction $P$.**

***Solution*** **:**

Pour cela on procède comme dans le point méthode.

On résout $P(x) = 1 \Longleftrightarrow -2x^2 + 3x = 0 \Longleftrightarrow x(-2x+3) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{3}{2}$.

L'abscisse de $S$ vaut :

$$\alpha = \frac{0 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

Son ordonnée vaut :

$$\beta = P(\alpha) = -2 \times \frac{9}{16} + \frac{9}{4} + 1 = -\frac{18}{16} + \frac{18}{8} + \frac{8}{8} = -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + \frac{8}{8} = \frac{17}{8}$$

Les coordonnées de $S$ sont $\left(\frac{3}{4}; \frac{17}{8}\right)$, la forme canonique de $P$ est donc :

$$P(x) = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{17}{8}$$

**Exercice 1** : Dans chacun des cas suivants, déterminer l'extremum de $f$, on précisera s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum et pour quelle valeur de $x$ il est atteint.

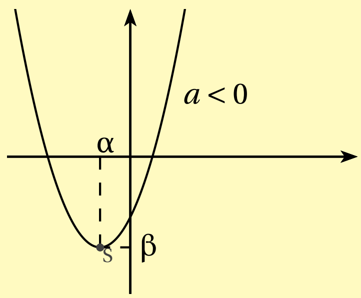
1. $f(x) = -3(x-1)^2 + 2$
2. $f(x) = 4(x+2)^2 - 5$
3. $f(x) = -2x^2 + 1$
4. $f(x) = 7\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$
5. $f(x) = -(x + 1 - \sqrt{2})^2 + 1$.

### I.3.c. Variations

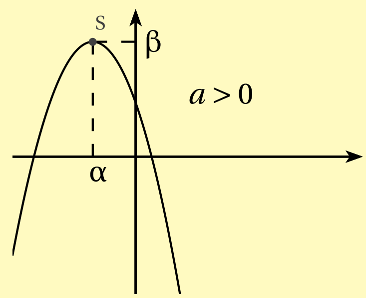
**Corollaire 1.**

Soit $P$ une fonction polynôme de degré 2 de forme canonique $P(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$.

Si $a>0$ alors la parabole qui représente $P$ admet un minimum.
On dira qu'elle est ouverte vers le haut




Si $a<0$ alors la parabole qui représente $P$ admet un maximum.
On dira qu'elle est ouverte vers le bas.




Ainsi

⇝ Si $a>0$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | ↘ | $P(\alpha)$ | ↗ | |

⇝ Si $a<0$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | ↗ | $P(\alpha)$ | ↘ | |

**Exercice du Cours** : On donne :

⇝ $P$ est un polynôme de degré 2.

⇝ $a=3$

⇝ $S(1;2)$

**1.** Décrire l'allure de $\mathscr{C}_p$ la courbe représentative de la fonction $P$.

**2.** Retrouver la forme développée de $P$.

**Exercice du Cours** : Donner le tableau de variation de la fonction $P$ avec :

**1.** $P(x) = -2(x+0,5)^2-3$.

**2.** $Q(x) = 5x^2-3x-2$.

**Exercice 2** : Les fonctions $f$ et $g$ sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2+28x+87$ et $g(x) = -x^2-2x$

**1.** Vérifier que pour tout réel $x$ on a $f(x) = 2(x+7)^2-11$ et $g(x) = -(x+1)^2+1$.

2. En déduire les tableaux de variations de $f$ et $g$.
3. Sans calculer, comparer si possible les images de $1$ et $4$
4. Contrôler les résultats à la calculatrice.

**Exercice 3** : Justifier que la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -3x^2 + 6x + 2$ admet le tableau de variations ci-dessous :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | |

**Exercice 4** : On note $\mathscr{P}$ la parabole représentant la fonction $f : x \mapsto ax^2 + 3x - 4$ dans un repère orthogonal.

1. Calculer le réel $a$ sachant que la parabole $\mathscr{P}$ passe par le point $A(3; -4)$
2. Déterminer un autre point de $\mathscr{P}$ d'ordonnée $-4$.
3. En déduire les coordonnées du sommet de la parabole $\mathscr{P}$ puis la forme canonique de $f$.
4. Etablir le tableau de variations de la fonction $f$.

***Conclusion***

La forme canonique d'une fonction est P polynôme de degré 2 est pratique pour :

- ⇝ Trouver les coordonnée du sommet S de la parabole et l'axe de symétrie
- ⇝ Trouver le tableau de variations de P

**Exercice(s) du livre** : 10 p 104 + 26 p 107 (reconnaître une courbe, trouver une image à partir d'une tableau de variation sur $[-3; 5]$)

## I.4. Forme factorisée et signe

Dans certains cas nous pouvons écrire $P(x)$ comme produit de deux expressions affines (mais pas dans tous les cas).

**Exemples :**

Si $P(x) = (x-3)^2 - 4$ alors $P(x) = (x-3-2)(x-3+2) = (x-5)(x-1)$.
Si $Q(x) = (x+4)^2 - 3 = (x+4-\sqrt{3})(x+4+\sqrt{3})$
Si $K(x) = (x-3)^2 + 1$ n'admet pas de factorisation. Ici $K(x) \geq 1$ et la représentation graphique de $K$ est une parabole tournée vers le bas qui admet pour minimum $1$, elle ne croise pas l'axe des abscisses. Dans un tel cas il n'est pas possible d'écrire $K$ comme produit de deux expressions affines.

**Définition 2.**

Si $P(x)$ est écrite comme un produit de deux expressions affines on dit que $P$ est écrite sous forme **factorisée**.
Dans ce cas, on peut même écrire $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ et $x_1$ et $x_2$ sont donc les solutions de l'équation $P(x) = 0$ (éventuellement confondues).
On les appelle les **racines** du polynôme $P$.

**Remarques :**

- Cette forme n'existe pas toujours.
  Elle existe si et seulement si l'équation $P(x) = 0$ possède des solutions $x_1$ et $x_2$.
  Autrement dit, si et seulement si la parabole représentative de $P$ coupe l'axe des abscisses en deux points $A(x_1, 0)$ et $B(x_2, 0)$ éventuellement confondus (dans ce cas, la parabole « frôle » l'axe des abscisses).
- Une parabole coupant l'axe des abscisses en $0$, $1$ ou $2$ point, un polynôme du second degré admet au plus $2$ racines.

**Exemples :**

$P(x) = (x-1)(x-4)$, $Q(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x+7)$ et $K(x) = (2x+1)(3-x)$ sont trois polynôme du second degré écrit sous forme factorisée. Répondre alors aux questions suivantes :

1. Déterminer les antécédents de $0$ pour $P$, $Q$ et $K$.
2. Dresser les tableaux de signes de $P$, $Q$ et $K$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes $P(x) > 0$, puis $Q(x) \leq 0$ et enfin $K(x) \geq 0$.

**Exercice du Cours** : Déterminer les racines du polynôme $P$ avec $P(x) = 7\left(x - \frac{1}{2}\right)(3-x)$.

**Exercice du Cours** : Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2\left(x - \frac{3}{4}\right) + \frac{25}{8}$.

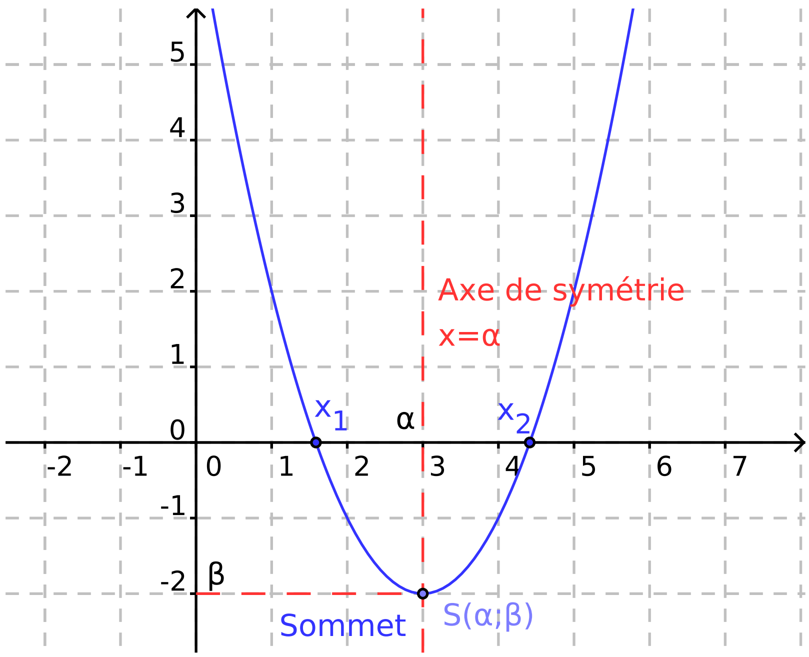
1. Montrer que $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que $f(x) = (2x+1)(-x+2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. En utilisant la forme la plus adéquate, répondre aux questions suivantes :

   a. Dresser le tableau de variation de $f$.

   b. Dresser le tableau de signe de $f$.




**Conclusion**

La forme factorisée est utile pour résoudre l'équation produit nul $\mathrm{P}(x) = 0$ ou étudier le signe de $\mathrm{P}(x)$, ce que l'on a déjà vu dans un chapitre précédent.

Grâce à l'orientation de la parabole, on peut même déduire le tableau de signe général suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | Signe de $a$ | 0 | Opposé de $a$ | 0 | Signe de $a$ | |

**Exercice 5** : Voici trois expressions d'une même fonction $f$ représentée par une parabole $\mathscr{P}$ dans un repère.

$$f(x) = 2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{49}{8} \qquad f(x) = 2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+2) \qquad f(x) = 2x^2 + x - 6$$

1. Reconnaître les trois formes.

2. Vérifier les égalités proposées

3. Choisir la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes :

   a. En quel point $\mathscr{P}$ coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

**b.** En quel point $\mathscr{P}$ coupe-t-elle l'axe des ordonnées ?

**c.** Quel est le sens de variation de $f$ ?

**d.** Quel est l'extremum de $f$ ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quel nombre est-il atteint ?

**Exercice 6** : Voici trois expressions d'une même fonction $f$.

$$f(x) = -2x^2 - 6x - 4 \qquad f(x) = -2\,(x+2)\,(x+1) \qquad f(x) = -2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

1. Reconnaître les trois formes.
2. Vérifier les égalités proposées
3. Choisir la forme la plus adaptée pour calculer :

$$f(-2) \qquad f\left(-\frac{3}{2}\right) \qquad f(0)$$

**Exercice 7** : Voici trois expressions d'une même fonction $f$ représentée par une parabole $\mathscr{P}$ dans un repère.

$$f(x) = -2x^2 - 6x - 4 \qquad f(x) = -2\,(x+2)\,(x+1) \qquad f(x) = -2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

1. Reconnaître les trois formes.
2. Vérifier les égalités proposées
3. Choisir la forme la plus adaptée pour déterminer les antécédents de :

$$0 \qquad -15 \qquad -27$$

4. $-30$ a–il des antécédents par $f$ ?
5. Dresser le tableau de variations de $f$.

**Exercice 8** : Tracer sur l'écran d'une calculatrice graphique les courbes de la fonction carré et de la fonction affine définie par $f(x) = x$.
Comparer alors graphiquement un réel et son carré. *Justifier les réponses.*

**Exercice 9** :

1. Sur votre calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction carré sur l'intervalle $[-3;3]$, puis celle de la fonction affine $x \mapsto -x+2$.
2. Par lecture graphique, déterminer les coordonnées des points d'intersection de ces deux courbes.
3. Développer $(x+2)(x-1)$.

4. Retrouver les solutions de la première question par le calcul.

**Exercice 10** :

1. Tracer sur votre calculatrice la courbe représentative de la fonction carré.
2. Expliquer graphiquement :
   a. Pourquoi il existe deux réels dont le carré est 4. Quels sont ces réels ?
   b. Pourquoi il n'existe pas de réel dont le carré vaut $-1$ ?
3. Reprendre les questions précédentes par le calcul.

**Exercice 11** : Résoudre l'inéquation $x^2 \leq 25$ par le calcul et vérifier graphiquement.
Même question avec $x \geq 16$.

**Exercice(s) du livre** : 18 p 105 (études fonctions, choix de forme)
50-52-53 p 111 (corrigés)
15-19 p 120 + 34-35 p 123 (inéquations)

# II ) Fonctions Homographiques

## II.1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

***Travail de l'élève*** **1.** Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

**1.** Vérifier que $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab}$

**2.** Etudier le signe de $\dfrac{b-a}{ab}$.

**3.** En déduire l'ordre de $\dfrac{1}{a}$ et $\dfrac{1}{b}$.

**Définition 3 :**

On appelle fonction inverse la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

**Remarque :** La fonction inverse possède un quotient, mais pas racine. Son quotient existe dès que $x \neq 0$ donc elle est définie sur $\mathbb{R}^*$.

**Exercices du livre :**

26 à 28 p 85 + 30 - 31 p 86

**Propriété 3 :**

La fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*-}$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$.

***Preuve***

Voir l'activité pour les positifs. On procède de même sur les négatifs.

On sait qu'un nombre et son inverse son de même signe. On peut alors dresser le tableau de variations et de signe de la fonction inverse :

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | $\searrow$ | ‖ | $\searrow$ |
| Signe de $\dfrac{1}{x}$ | $-$ | ‖ | $+$ |

D'après le tableau de variations, la fonction inverse n'admet pas d'extremum sur $\mathbb{R}^*$.

## Exemple :

Dans chaque cas, comparer les nombres suivants sans les calculer :

1. $\dfrac{1}{-0.012}$ et $\dfrac{1}{-0.099}$
2. $\dfrac{1}{\pi-3}$ et $\dfrac{1}{0.21}$
3. $\dfrac{1}{\pi-3}$ et $\dfrac{1}{-0.21}$
4. $\dfrac{1}{2-\sqrt{7}}$ et $\dfrac{1}{2-\sqrt{5}}$

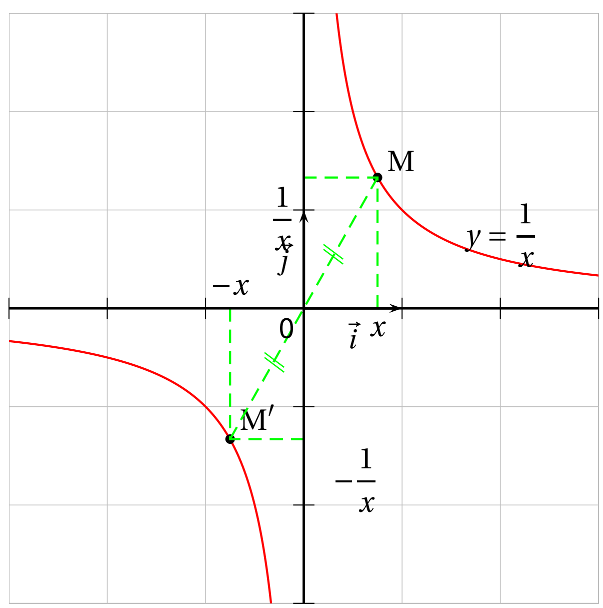
## Exercices du livre :

36 à 42 p 86

## Définition 4 :

Dans un repère orthogonal, la courbe repésentative de la fonction inverse est appelée **hyperbole**.

On esquisse la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$ en s'appuyant sur un tableau de valeurs :




| $x$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 | $-1$ | $-2$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $-2$ | $-3$ |

### Exercices du livre :

29 p 85 + 35 - 44 à 46 p 86

### *Exercice 12* :

Tracer sur l'écran d'une calculatrice graphique les courbes de la fonction inverse et de la fonction affine définie par $f(x) = x$.

Comparer alors un réel non nul et son inverse. Justifier les réponses.

### Propriété 4 :

La courbe de la fonction inverse est *symétrique* par rapport à l'origine du repère.

On dit que la fonction est **impaire**. Cela se traduit par les conditions :

- $\rightsquigarrow$ L'ensemble de définition $\mathscr{D}$ est symétrique par rapport à $0$
- $\rightsquigarrow$ Pour tout $x \in \mathscr{D}$, on a $f(-x) = -f(x)$

### *Preuve*

Pour tout nombre réel $x \neq 0$ le point $\mathrm{M}\left(x; \dfrac{1}{x}\right)$ est sur la hyperbole $\mathscr{H}$ représentative de la fonction inverse.

Son symétrique par rapport à l'origine du repère est $\mathrm{M}'\left(-x; -\dfrac{1}{x}\right)$.

Or ce point $\mathrm{M}'$ est lui aussi sur $\mathscr{H}$ car $\dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$.

## II.2. Fonctions homographiques

### Définition 5 :

On appelle fonction homographique toute fonction de la forme $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$, où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des réels fixés avec $c \neq 0$ et $a \times d \neq b \times c$.

La courbe représentative s'appelle une **hyperbole**.

**Remarques :**

- $\rightsquigarrow$ La condition $ad \neq bc$ traduit le fait que $ax+b$ et $cx+d$ ne sont pas proportionnels.
- $\rightsquigarrow$ L'expression algébrique d'une fonction homographique contient un quotient. Elle n'existe que si le dénominateur $cx+d$ est différente de $0$, ie $x \neq -\dfrac{d}{c}$.

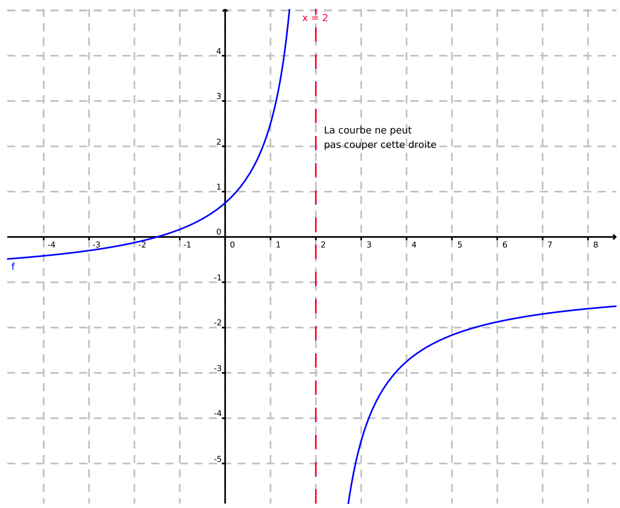
  L'ensemble de définition est donc $\mathscr{D} \left]-\infty; -\dfrac{d}{c}\right[ \cup \left]-\dfrac{d}{c}; +\infty\right[$
- $\rightsquigarrow$ Grâce aux tableaux de signes, on sait déjà étudier le signe d'une fonction homographique.

  Attention cependant à ne pas oublier d'indiquer la valeur interdite !

## Exemple :

La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x+3}{-2x+4}$ a pour ensemble de définition $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.

La courbe représentative de $f$ dans un repère est formée de deux branches distinctes, séparée par la droite d'équation $x=2$.



### Exemple :

Pour résoudre l'inéquation $\dfrac{3-x}{4x-1} > 0$ :

- On commence par résoudre

$$\frac{3-x}{4x-1} > 0 \iff 3-x=0 \text{ et } 4x-1 \neq 0 \iff x=3 \text{ et } x \neq \frac{1}{4} \quad \textbf{(VI)}$$

- Ensuite on étudie le signe du quotient $\dfrac{3-x}{4x-1}$, en procédant comme dans l'activité.

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{4}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $3-x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Signe de $4x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| Signe de $\dfrac{3-x}{4x-1}$ | | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

*Vérifier graphiquement.*

### Exercice 13 :

1. Ecrire l'algorithme de calcul de la fonction $f$ définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{-5}{(x-2)^2} + 3$$

2. Soient $a$ et $b$ appartenant à $]-\infty;2[$ tels que $a < b$.
En utilisant l'algorithme ci-dessus et les variations des fonctions de référence, comparer $\dfrac{-5}{(a-2)^2}+3$ et $\dfrac{-5}{(b-2)^2}+3$
3. En déduire si $f$ conserve ou inverse l'ordre sur $]-\infty;2[$.
4. En suivant la même démarche, dire si $f$ conserve ou inverse l'ordre sur $]2;+\infty[$.
5. En déduire le tableau de variations de $f$.

### Exercices du livre :

22 à 31 p 121

### Exercices du livre :

20-21 p 105 + 46-48-49-50-51 p 125

« *Il faut avoir une haute idée, non pas de ce qu'on fait, mais de ce qu'on pourra faire un jour ; sans quoi ce n'est pas la peine de travailler.* » EDGAR DEGAS.