# I ) Décrire une expérience aléatoire

## Petits problèmes d'introduction

**Problème : Jeu du lièvre et de la tortue**

Le jeu consiste à affronter un lièvre et une tortue pour parcourir un plateau de **6 cases**, selon les règles suivantes :

- On lance un dé équilibré à 6 faces,
- Si le 6 sort, le lièvre avance directement de 6 cases (et donc gagne) ;
- Sinon, la tortue avance d'**une** case.
- Le jeu continue jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant.

Quelle est la situation la plus enviable, celle du lièvre ou de la tortue ?
A quel point ?

**Problème : Jeu des portes**

Un jeu télévisé se déroule de la manière suivante : il y a trois portes, derrière l'une d'entre elles se trouve 10000€ et rien derrière les deux autres. Un candidat choisit au hasard l'une des trois. Ensuite le présentateur élimine une des deux mauvaises portes, tout en conservant celle choisie par le candidat. Le candidat peut alors conserver son choix ou le changer.
Que vaut-il mieux faire pour le candidat, changer ou conserver son choix ?
Quelles sont ses chances de gagner dans le premier cas, et dans le deuxième ?

**Problème : Le problème du Duc de Toscane**

A la cour de Florence au début du XVII$^e$ siècle, de nombreux jeux de société étaient alors pratiqués. Parmi ceux-ci, l'un faisait intervenir la somme des numéros sortis lors du lancer de trois dés.
Le Duc de Toscane, qui avait sans doute observé un grand nombre de parties de ce jeu, avait constaté que la somme 10 était obtenue légèrement plus souvent que la somme 9 mais il ne comprenait pas pourquoi et exposa son problème à Galilée.
*C'est le début de l'étude des probabilités et c'est pourquoi le vocabulaire fait parfois référence à celui des jeux.*
Et vous, que pensez-vous de ce problème ?

**Problème : des Anniversaires**

A votre avis, quelle est la probabilité que sur l'ensemble des élèves de seconde du lycée, deux personnes (non jumelles) aient leur anniversaire le même jour de l'année ?
Dans un groupe de 60 personnes ? Dans un groupe de 30 personnes ?
A votre avis, combien doit-on réunir de personnes pour avoir au moins une chance sur deux que deux personnes de ce groupe aient leur anniversaire le même jour de l'année ?

## I.1. Modéliser une expérience aléatoire

**Travail de l'élève 1** : Un sac contient huit boules : 3 vertes (V), 2 bleues (B), 1 rouge (R) et 2 noires (N).
On tire une boule au hasard et on note sa couleur.
Compléter le tableau suivant, modélisant cette expérience :

| Résultats | V | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Probabilités | | | | | |

**Définition 1.**

**Modéliser** une expérience aléatoire, c'est décrire tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire et choisir leurs probabilités de réalisation afin de représenter au mieux la réalité.
On présente souvent les résultats dans un tableau :

- La première ligne contient
- la seconde contient

**Exercice du Cours** : Modéliser l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux pièces de monnaie et regarder les faces obtenues (P ou F).

**Remarque :** Dans le jeu du Duc de Toscane, les issues possibles sont

## I.2. Vocabulaire

| Vocabulaire | Exemple 1 | Exemple 2 |
|---|---|---|
| **Expérience aléatoire** :<br>Processus dont le résultat est incertain<br>(mais dont on peut prévoir le type) | Lancer un dé cubique et on regarde le numéro obtenu | Lancer deux pièces de monnaie et on regarde les faces obtenues |
| **Eventualité** ou **Issue** :<br>Résultat possible d'une expérience aléatoire | « Obtenir 6 »<br>noté 6 | « Obtenir deux fois Pile »<br>noté PP |
| **Univers** :<br>Ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire.<br>On le note souvent $\Omega$. | $\Omega = \{\ldots$ | $\Omega = \{\ldots$ |
| **Evénement** :<br>Ensemble d'issues de l'univers.<br>(partie ou sous ensemble de $\Omega$) | A : « Obtenir un numéro Pair »<br>$A = \{\ldots$ | B :« Obtenir **au moins** une fois pile »<br>$B = \{\ldots$ |

**Exercice du Cours** : On lance deux dés à 6 faces et on regarde la somme des faces obtenues. Proposer deux univers possibles pour décrire cette expérience.

### I.3. Loi de probabilité

**Travail de l'élève 2 :** Un sac rouge contient trois boules numérotées 1, 2 et 3.
Un sac bleu contient quatre boules numérotées 0, 1, 2 et 3.
On tire une boule dans chaque sac et on calcule la somme des deux numéros.

1. Compléter le tableau ci-contre.
2. En déduire l'univers $\Omega$ de cette expérience.
3. Déterminer la loi de probabilité de cette expérience sous forme d'un tableau.
4. Que vaut la somme des probabilités des issues ?
5. Quel est l'événement le plus probable (expliquer) :

   A : « Obtenir une somme supérieure ou égale à 5 »

   ou B : « Obtenir une somme supérieure ou égale à 2 » ?

| **Somme** | | **Sac rouge** | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 |
| **Sac Bleu** | 0 | | | |
| | 1 | | | |
| | 2 | | | |
| | 3 | | | |

**Définition 2.**

On considère une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \ldots ; \omega_n\}$ ($n$ issues possibles).
Définir une **loi de probabilité** P sur $\Omega$ c'est associer à chaque éventualité $\omega_i$ une probabilité $p_i$ de sorte que

—

—

De plus, la probabilité d'un événement A, notée P(A), doit être

**Remarques :**

— On a $P(\Omega) =$.

— Par convention, on pose $P(\emptyset) =$.

— Pour tout événement A, on a $\quad \leq P(A) \leq \quad$.

— Il ne faut pas confondre un événement A qui est un ensemble d'issues de l'expérience et sa probabilité P(A) qui est un nombre de l'intervalle $[0;1]$.

**Exercice du Cours** : Soit un dé truqué dont les probabilités des faces d'apparitions sont donnés par le tableau suivant :

| Eventualité | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | $0,05$ | $0,05$ | $0,1$ | $0,1$ | $0,2$ | $a$ |

1. Calculer la probabilité de l'éventualité : « le dé tombe sur 6 ».
2. Calculer la probabilité de l'événement A =« obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 ».
3. Calculer la probabilité de l'événement B =« obtenir un nombre premier ».
4. Calculer la probabilité de l'événement C = « obtenir un nombre pair ».

### I.4. L'équiprobabilité

**Définition 3.**

Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit qu'il y a
ou encore que la loi de probabilité est

**Proposition 1.**

Lorsque la loi de probabilité est équirépartie, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \underline{\hspace{6cm}}$$

**Exercice du Cours** : Dans un jeu de 32 cartes, déterminer la probabilité de piocher :

- le valet de coeur
- un valet
- un coeur

## II ) Intersection, réunion et complémentaire

### II.1. Vocabulaire et notations

**Travail de l'élève 3** : On dispose de deux urnes 1 et 2 contenant 12 boules chacune.
L'urne 1 contient 6 boules rouges et 6 boules jaunes.
L'urne 2 contient 6 boules rouges, 4 boules bleues et 2 boules jaunes.
Un jeu consiste à choisir une première boule dans l'urne 1, puis une seconde boule dans l'urne 2.
On s'intéresse aux couleurs obtenues et on décrit les issues de ce jeu par un couple de couleurs (ordonnées).
*Par exemple, le résultat* (J; R) *signifie que la première boule tirée est jaune, et que la seconde est rouge.*

**1.** Décrire l'issue (R; B) par une phrase.
(R; B) : « ...

**2.** Déterminer l'univers $\Omega$ de cette expérience.
$\Omega = \{ \ldots$

**3.** Donner les issues qui réalisent les événements suivants, en complétant ci-dessous :

- A= « obtenir une boule jaune au $1^{er}$ tirage » A=$\{ \ldots$
- B= « obtenir une boule bleue exactement » B=$\{ \ldots$
- C= « obtenir au moins une boule rouge » C=$\{ \ldots$
- D= « obtenir au plus une boule rouge » D=$\{ \ldots$
- E= « obtenir deux boules rouges » E=$\{ \ldots$

**4.** **a.** Déterminer l'ensemble des issues de l'univers qui ne sont pas dans A, noté $\overline{A}$ (se lit « A barre »).
$\overline{A} = \{ \ldots$

**b.** Décrire ce nouvel événement par une phrase.

**c.** Décrire par une phrase l'événement $\overline{B}$ puis l'événement $\overline{C}$
$\overline{B}$ : « ...

$\overline{C}$ : « ...

**5.** **a.** Déterminer l'ensemble des issues de l'univers communes à A et B, noté $A \cap B$ (se lit « A inter B »)
$A \cap B = \{$

**b.** Décrire ce nouvel événement par une phrase.

**c.** Décrire par une phrase l'événement $A \cap D$.
$A \cap D$ : « ...

**d.** Déterminer l'ensemble des issues composant $A \cap E$ puis $A \cap \overline{A}$

**e.** Décrire par une phrase $C \cap E$ puis déterminer l'ensemble des issues composant cet événement.
$C \cap E$ : « ...

$C \cap E = \{...$

**6.** **a.** A votrer avis, comment traduire par une phrase l'événement $A \cup B$ ?

**b.** Déterminer l'ensemble des issues composant $A \cup B$.

**c.** Déterminer l'ensemble des issues de $A \cup \overline{A}$

Soient Ω un univers, et A et B des événements de Ω.

| Notation | Vocabulaire | Définition | Illustration |
|---|---|---|---|
| $\overline{A}$<br><br>« A barre » | Evénement **complémentaire** de A<br><br>ou encore<br>Evénement **contraire** de A | Ensemble des issues de l'univers n'appartenant pas à A | |
| $A \cap B$<br><br>« A inter B » | **Intersection** de A et de B<br><br>(se traduit dans une phrase en français par « **ET** ») | Ensemble des issues de l'univers **communes** à A et B<br><br>*donc celles qui réalisent* ***A et B*** | |
| $A \cup B$<br><br>« A union B » | **Réunion** de A et B<br><br>(se traduit dans une phrase en français par « **OU** ») | Ensemble des issues de l'univers qui sont dans **au moins l'un des événements A ou B**<br><br>*donc celles qui réalisent* ***soit A, soit B, soit les deux*** | |

**Cas particuliers :**

| Notation | Vocabulaire | Conséquence(s) | Illustration |
|---|---|---|---|
| $A \cap B = \emptyset$ | A et B sont **disjoints**<br><br>ou encore<br>**incompatibles**. | On ne peut pas avoir les événements A et B en même temps. | |
| $A \subset B$<br>A **inclus**<br>dans B | A est une **partie** de B<br><br>ou encore<br>un **sous-ensemble** de B | $\rightsquigarrow$ Tous les éléments de A sont dans B<br>$\rightsquigarrow$ On ne peut pas avoir l'événement A sans l'événement B.<br>$\rightsquigarrow$ $A \cap B = A$<br>$\rightsquigarrow$ $A \cup B = B$ | |

**Exercice du Cours** : Dans un groupe de 500 élèves, 350 pratiquent un sport et 200 font de la musique ; 100 élèves pratiquent les deux activités. On note S l'événement « l'élève fait un sport » et M l'événement « l'élève fait de la musique ».

**1.** Représenter la situation par un diagramme.

**2.** Décrire par une phrase de chacun des événements suivants :

— $S \cap M$ : «

— $S \cup M$ : «

— $\overline{S}$ : «

— $\overline{M}$ : «

— $\overline{S \cap M}$ : «

— $\overline{S \cup M}$ : «

**3.** On choisit un élève au hasard. Déterminer la probabilité des événements S, M et de chacun des événements précédents.

### II.2. Quelques propriétés

**Travail de l'élève 4** : Dans un lycée, il y a 250 élèves qui font partie de l'association sportive : 120 élèves font partie de la section badminton, 90 de la section football et 50 élèves des deux sections.
On désigne au hasard un élève de l'association sportive, tous les élèves ayant la même chance d'être désignés.
On considère les événements suivants :

- B : « l'élève fait partie de la section badminton » ;
- F : « l'élève fait partie de la section football ».

1. Donner $p(\mathrm{B})$ et $p(\mathrm{F})$.

2. **a.** Déterminer $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}})$, puis $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{F}})$.

   **b.** Que constatez-vous ?

3. En vous aidant d'un diagramme, déterminer le nombre d'élèves :
   - qui pratiquent uniquement du badminton ;
   - qui pratiquent uniquement du football ;
   - qui ne font ni du badminton, ni du football.

4. **a.** Définir par une phrase l'événement $\mathrm{B} \cap \mathrm{F}$, puis calculer $p(\mathrm{B} \cap \mathrm{F})$.

   **b.** Définir par une phrase l'événement $\mathrm{B} \cup \mathrm{F}$, puis calculer $p(\mathrm{B} \cup \mathrm{F})$.

   **c.** Calculer $p(\mathrm{B}) + p(\mathrm{F}) - p(\mathrm{B} \cap \mathrm{F})$. Que constate-t-on ?

**Propriété 1.**

Pour tout événement A et B on a :

$$p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

**Remarques :**

— On peut également retenir cette propriété sous sa forme :

— En particulier si les événements A et B sont disjoints (c'est-à-dire si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$) on a :

$$p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

**Exercice du Cours** : On lance un dé équilibré à 20 faces numérotées de 1 à 20. On regarde le numéro de la face obtenue.
Soit A l'événement : « obtenir un nombre multiple de 5 » et B l'événement : « obtenir un nombre multiple de 3.

1. Déterminer $p(\mathrm{A})$ puis $p(\mathrm{B})$.

2. Décrire par une phrase $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ puis en déduire $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

3. Décrire par une phrase $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ puis calculer $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$.

**Corollaire 1.**

— La probabilité de l'événement contraire $\overline{\mathrm{A}}$ de A est $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})$.

— Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, alors $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \leq \mathrm{P}(\mathrm{B})$

**Exercice du Cours** : On choisit une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes bien battu. F est l'événement : « la carte choisie est une figure » et T est l'événement : « la carte choisie est un trèfle ».

1. Donner $p(\mathrm{F})$ et $p(\mathrm{T})$.

2. Décrire par une phrase les événements $\overline{\mathrm{F}}$ et $\overline{\mathrm{T}}$ puis calculer $p(\overline{\mathrm{F}})$ et $p(\overline{\mathrm{T}})$.