Exercices
Les fonctions numériques

Exercice 1 : **Appliquer un algorithme**

PARTIE A : **Trace d'algorithme**

1. Compléter la trace de l'algorithme ci-contre, obtenue avec l'entrée $x = 3$

Rang	Instructions	a	b
1	$a \longleftarrow x+1$		
2	$b \longleftarrow a^2-4$		

2. Que renvoit l'algorithme ?
3. Compléter alors la phrase suivante :
   Le nombre associé à ... par la fonction f définie par l'algorithme est ...

Algorithme 1 :

Entrée(s) :
x est un nombre réel
Variable(s) :
x, a et b sont des nombres réels
Début
1. a reçoit la valeur $x+2$
2. b reçoit la valeur a^2-4
3. Renvoyer b

Fin

PARTIE B : **QCM**

Donner **toutes** les bonnes réponses.

1. Le nombre obtenu avec l'entrée -2 est :

   a. 0 **b.** -4 **c.** 12

2. Le nombre obtenu avec l'entrée 1 est :

   a. 5 **b.** 2 **c.** 13

3. Si on veut obtenir 0, on peut entrer :

   a. 0 **b.** -2 **c.** -4

4. Si on veut obtenir -4, on peut entrer :

   a. 0 **b.** 2 **c.** -2

5. Une expression algébrique de la fonction f définie pour tout réel x par cet algorithme est :

   a. $f(x) = x^2 - 2$ **b.** $f(x) = (x+2)^2 - 4$ **c.** $f(x) = x^2 + 4x$

Exercice 2 : **Comprendre un algorithme**

On considère l'algorithme ci-dessous, écrit dans un langage « naturel ».

Algorithme 2 : *Un calcul*

Entrée(s) :
x est un nombre réel
Variable(s) :
y est un nombre réel
Début
1. $y := x+1$
2. $y := 4 \times y$
3. Le résultat est y

Fin

1. Compléter la trace d'exécution de cet algorithme avec l'entrée $x = 3$, puis $x = -1$ puis $x = -3$.

		$x=3$		$x=-1$		$x=-3$	
Rang	Instruction	x	y	x	y	x	y
1							
2							
Le résultat est :							

2. Déterminer une expression algébrique de la fonction f qui à tout nombre réel x entré associe le résultat de l'algorithme.

Exercice 3 : Soit la fonction f qui à un réel x associe le réel $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ **Images et Valeurs Interdites**

1. Calculer $f(3)$.
2. Déterminer l'image de -1 par la fonction f.
3. La fonction f admet-elle des valeurs interdites ? Si oui, préciser lesquelles.

Exercice 4 : Soit la fonction f définie qui à un réel x associe le réel $f(x) = x^2 - \dfrac{6}{1-x}$ quand il existe. **Images et VI**

1. Calculer $f(-2)$.
2. Calculer l'image de 3.
3. Pourquoi l'image de 1 par f n'existe-t-elle pas ? En déduire l'ensemble de définition de f.

Exercice 5 : **Fonction définie par un algorithme**

1. Décrire la fonction associée à l'algorithme ci-contre
2. Déterminer ses éventuelles valeurs interdites et en déduire son ensemble de définition.
3. Calculer lorsque c'est possible l'image des nombres suivants :

$$0 \qquad 1 \qquad -1 \qquad \frac{1}{2} \qquad -3 \qquad 3$$

4. Vérifier les résultats à l'aide d'un tableau de valeurs sur la calculatrice.

Algorithme 3 :

Entrée(s) :
x est un nombre réel
Variable(s) :
y est nombre réel
Début
Affecter à y la valeur $\sqrt{1-2x} + 5$
Afficher y
Fin

Exercice 6 : On choisit un nombre, on lui ajoute 4, on élève le résultat au carré, on retranche 16 et on divise le tout par le nombre de départ. **Algorithme de calcul**

1. Quelle est l'image de 4 par la fonction $blop$ décrite par cet algorithme ?
2. En appelant x le nombre choisi, décrire chaque étape de l'algorithme de calcul ci-dessus.
3. En déduire une expression algébrique de la fonction $blop$.
4. La fonction $blop$ admet-elle des valeurs interdites ? En déduire son ensemble de définition.
5. Que vaut $blop(0)$?
6. Quelle est l'image de -1 ?

Exercice 7 : **Fonction affine par morceaux et instruction conditionnelle**

Un magasin de reprographie applique le tarif suivant :

- ⇝ 0.15€ l'unité jusqu'à 50 photocopies
- ⇝ 0.10€ l'unité **au-delà**.

1. Calculer le montant à payer pour 10 ; 50 puis 100 photocopies.
2. Pour chaque cas, donner la fonction $\mathrm{P}rix$ qui à un nombre x de photocopies associe le prix à payer $\mathrm{P}rix(x)$.
3. Compléter l'algorithme ci-contre, qui automatise ce calcul pour x photocopies et renvoie le prix à payer $\mathrm{P}rix(x)$.
4. Le programmer sur la calculatrice et/ou Algobox.
5. Modifier l'algorithme ci-contre pour que l'utilisateur choisisse les prix des photocopies P et Q en fonction d'un nombre N de photocopies dépassé ou non.
Ici on avait $\mathrm{P} = 0.15$, $\mathrm{Q} = 0.10$ *et* $\mathrm{N} = 50$.

Algorithme 4 :

Entrée(s) :

Variable(s) :

Début
Si ( ) **Alors**

Sinon

Fin Si
Renvoyer
Fin

Exercice 8 : **Instructions conditionnelles Imbriquées**

Un consommateur a la possibilité de choisir entre deux formules de location d'un studio pour ses vacances :

- **Formule A** : location fixe de 250€ + 10€ de charges par jour
- **Formule B** : location fixe de 300€ + 5€ de charges par jour.

1. Quelle est la formule la plus avantageuse pour une location d'une semaine ? de 12 jours ?
2. Pour chaque formule, donner la fonction M qui associe le nombre x de jours de location au montant à régler.
3. D'une façon plus générale, le consommateur souhaite connaître la formule la plus avantageuse en fonction du nombre de jours de location.
   On lui propose les trois algorithmes suivants. Quel(s) est (sont) le(s) algorithme(s) correct(s) ?

Algorithme 5 :

Entrée(s) :
x est un entier naturel
Variable(s) :
A et B sont des nombres réels
Début
  A reçoit la valeur $250+10x$
  B reçoit la valeur $300+5x$
  Si $(A < B)$ **Alors**
    Afficher « La formule B qui coûtera », B
  Sinon
    Si $(A = B)$ **Alors**
      Afficher « Les formules A et B coûteront », A
    Sinon
      Afficher « La formule A coûtera », A
    Fin Si
  Fin Si
Fin

Algorithme 6 :

Entrée(s) :
x est un entier naturel
Variable(s) :
A et B sont des nombres réels
Début
  $A \leftarrow 250+10x$
  $B \leftarrow 300+5x$
  Si $(A < B)$ **Alors**
    Afficher « La formule A coûtera », A
  Sinon
    Si $(A = B)$ **Alors**
      Afficher « Les formules A et B coûteront », A
    Sinon
      Afficher « La formule B coûtera », B
    Fin Si
  Fin Si
Fin

Algorithme 7 :

Entrée(s) :
x est un entier naturel
Variable(s) :
D est un nombre réel
Début
  $D := 5x-50$
  Si $(D > 0)$ **Alors**
    Afficher « La formule B est la plus avantageuse »
  Sinon
    Si $(D = 0)$ **Alors**
      Afficher « Les formules A et B sont équivalentes »
    Sinon
      Afficher « La formule A est la plus avantageuse »
    Fin Si
  Fin Si
Fin

Comprendre un algorithme

Exercice 9 : Voici la copie d'écran du logiciel Algobox.

1. Compléter la trace de l'algorithme ci-contre, obtenue avec l'entrée $x = 4$, puis avec $x = -7$.

Ligne	Instructions	$x = 4$	$x = -7$	
2	$q := (x+2)(x+2)$			
3	$q := q-(x+4)$			
4	$q := q/(x+3)$			

2. Norbert a saisi $x = -3$. Que se passe-t-il ? Pourquoi ?
3. Emettre une conjecture sur la fonction définie par cet algorithme.
4. Démontrer algébriquement cette conjecture.

Code de l'algorithme

```
VARIABLES
  q EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE x
  q PREND_LA_VALEUR (x+2)*(x+2)
  q PREND_LA_VALEUR q-(x+4)
  q PREND_LA_VALEUR q/(x+3)
  AFFICHER q
FIN_ALGORITHME
```

Exercice 10 : f est la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^2}$.

Appartenance d'un point à une courbe

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
   - **a.** Le point $A(-2; 0.6)$ appartient-il à $\mathscr{C}$?
   - **b.** Le point $B(3; -0.5)$ appartient-il à $\mathscr{C}$?

Exercice 11 : **Instruction conditionnelle et Fonction définie par morceaux**

On considère l'algorithme ci-contre :

1. Faire fonctionner cet algorithme pour $x = -2$, $x = 1$ et $x = 3$.
2. Cet algorithme définit une fonction f.
   - **a.** Donner l'ensemble de définition de f.
   - **b.** Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
   - **c.** Représenter graphiquement la fonction f.

Algorithme 8 :

Entrée(s) :
x est un nombre réel
Variable(s) :
y est un nombre réel
Début
  Si $(x < 1)$ **Alors**
    $y \leftarrow x^2$
  Sinon
    $y \leftarrow 2x$
  Fin Si
  Afficher y
Fin

Exercice 12 : **Fonction définie par morceaux et instruction conditionnelle**

On considère la fonction f définie sur $[-2;4]$ par $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \in [-2;1] \\ -x^2+1 & \text{si} \quad x \in]1;4] \end{cases}$

1. Ecrire un algorithme qui permette de calculer l'image par f d'un nombre x.
2. Construire la courbe représentative de f.

Exercice 13 :
On considère les fonctions f et g définies par

$$f(x) = 2x^2 - x + 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{3x+1}{2x-1}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ? Celui de g ?

2. **Instruction conditionnelle**.

a. Que fait le premier algorithme ci-contre ?

b. Ecrire un algorithme similaire pour la fonction g (en prenant soin de traiter à part le cas de la valeur interdite)

Algorithme 9 :

Entrée(s) :
x et y sont des nombres réels
Variable(s) :
a est un nombre réel
Début
  a prend la valeur $2x^2 - x + 1$
  Si ($y == a$) **Alors**
    Afficher « Le point $(x; y)$ appartient à la courbe représentative de f »
  Sinon
    Afficher « Le point $(x; y)$ n'appartient pas à la courbe représentative de f »
  Fin Si
Fin

3. **Boucle Pour.**

a. Que fait le second algorithme ci-contre ?

b. Ecrire un algorithme qui donne un tableau de valeurs de g, pour x allant de -2 à 3, avec un pas de 0.5 (avec pour réponse « valeur interdite » quand nécessaire).

Algorithme 10 :

Variable(s) :
x, y et compteur sont des nombres réels
Début
  $x := -3$
  Pour compteur allant de 1 **à** 10 **Faire**
    y prend la valeur $2x^2 - x + 1$
    Afficher $(x; y)$
    $x := x + 1$
  Fin Pour
Fin

Exercice 14 : Soit la fonction f qui à tout réel x associe le réel $f(x) = 2x^2 - 3$

1. Calculer $f(3)$.

2. Déterminer l'image de -1 par la fonction f.

3. Déterminer les antécédents éventuels de 7, de -3 et de -4 par la fonction f.

Exercice 15 : Ecrire un algorithme permettant de déterminer les antécédents de n'importe quel nombre réel y par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 1$

Exercice 16 : Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2x + 3$

1. La fonction f admet-elle des valeurs interdites ? En déduire son domaine de définition D_f.

2. Déterminer l'image par f des réels 0 ; $-\dfrac{3}{2}$ et $\sqrt{2}$.

3. Déterminer les éventuels antécédents de 3 par f.

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = (x-1)^2 + 2$.

5. En utilisant cette dernière écriture, déterminer les éventuels antécédents de 2 et de -4 par f.

Exercice 17 : **QCM**

Déterminer **toutes** les bonnes réponses.
On donne le programme de calcul suivant et l'algorithme correspondant :

Programme de calcul

- Choisir un nombre
- Mettre le nombre au carré
- Calculer le double du nombre
- Soustraire le deuxième résultat au premier
- Ajouter 2.

Algorithme 11 :

Entrée(s) :
x est un nombre réel
Variable(s) :
a, b, c sont des nombres réels
Début
  Entrer x
  $a \leftarrow x^2$
  $b \leftarrow 2 \times x$
  $c \leftarrow a - b + 2$
  Afficher c
Fin

1. Une expression algébrique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par cet algorithme est :
   a. $f(x) = x^2 - 2x + 2$
   b. $(x-1)^2 + 1$
   c. $f(x) = x^2 + 2$
2. L'image de 2 par f est :
   a. 0 **b.** 2 **c.** 10
3. L'image de -1 par f est :
   a. -1 **b.** -3 **c.** 5
4. Les antécédents de 10 par f sont :
   a. 4 **b.** -2 **c.** 0
5. Les antécédents de 17 par f sont :
   a. 5 **b.** 2 **c.** -3
6. Modifier l'algorithme donné afin de ne pas utiliser les variables a et b

Exercice 18 : **Boucle Pour**

Algorithme 12 :

Entrée(s) :
n est un entier naturel non nul
Variable(s) :
S, compteur et m sont des entiers naturels
Début
  S := 0
  m := 1
  Pour compteur allant de 1 à n **Faire**
    S := S + m
    m := m + 1
  Fin Pour
  Renvoyer …
Fin

1. Compléter la trace de l'algorithme ci-contre pour $n = 5$

S						
m						
compteur						

2. Que fait cet algorithme ?
3. Modifier cet algorithme afin de ne pas utiliser la variable m.