Exercices : Trigonométrie

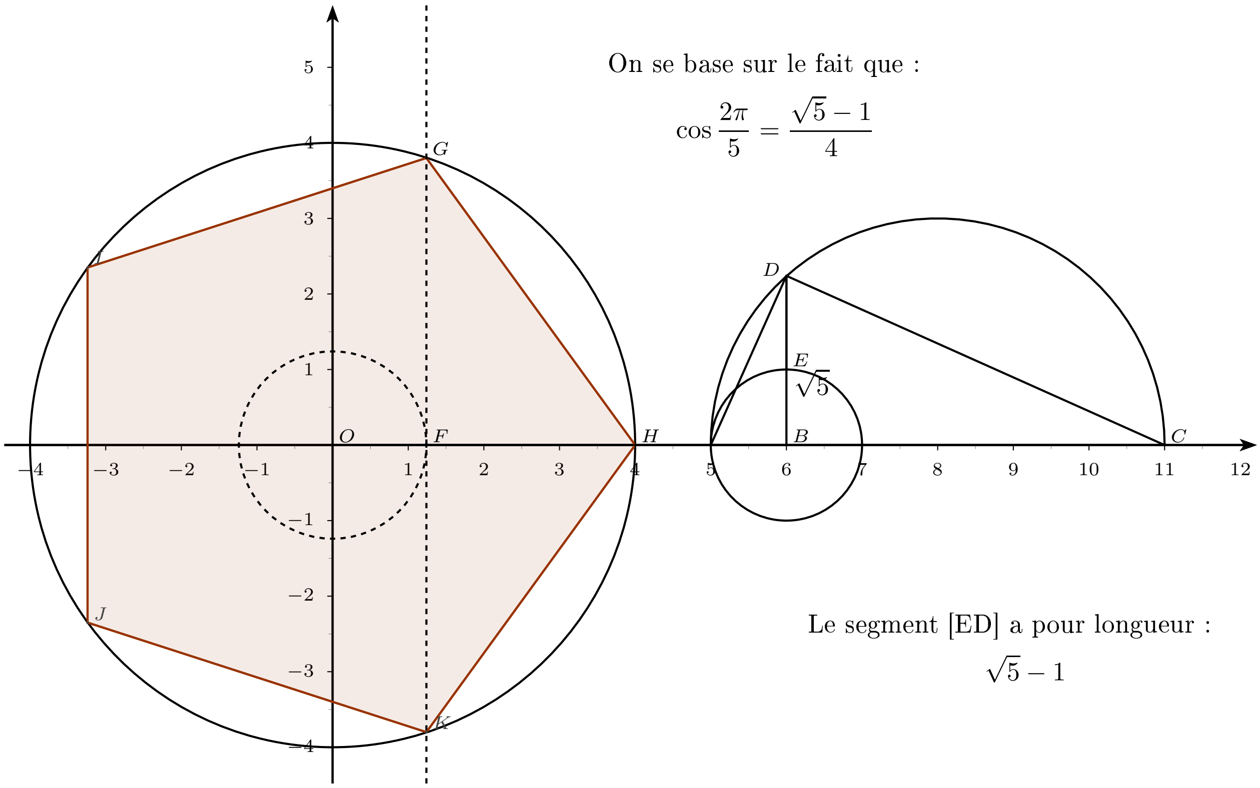
I. Le pentagone régulier

Exercice 1.

1. Voici ici une construction à l'aide de la règle non graduée et du compas du pentagone régulier. Reproduire une figure identique, puis en se basant sur le fait que :

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

justifier cette construction.



2. (a) Préciser le signe de $\sin\frac{2\pi}{5}$.

   (b) Sachant que $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, déterminer :

$$\sin\frac{2\pi}{5}$$

.

II. L'heptagone régulier

Exercice 2. On se propose de construction une approximation de l'heptagone régulier à l'aide de la règle non graduée et du compas.

1. A l'aide de votre calculatrice donner une valeur approchée de :

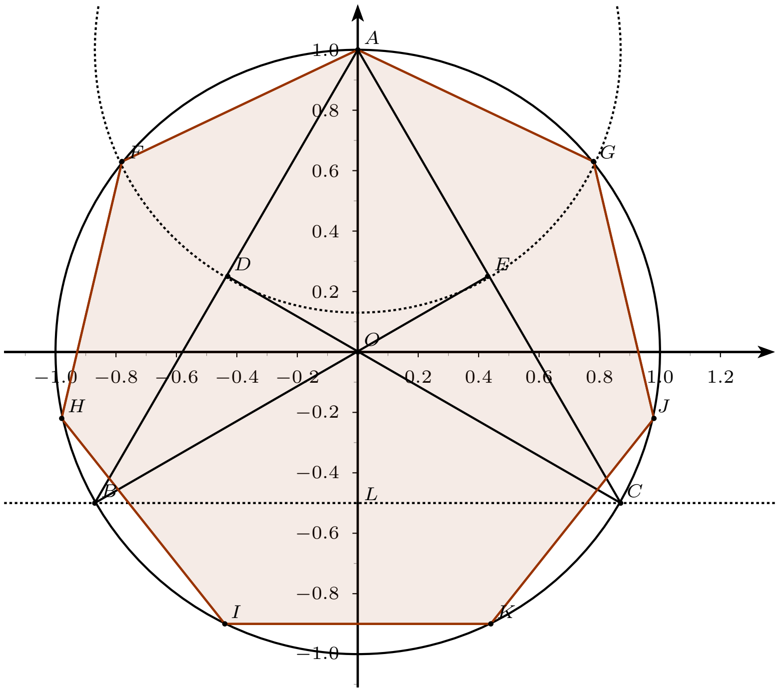
$$\cos\frac{2\pi}{7} \qquad \text{et de} \qquad \sin\frac{2\pi}{7}$$

2. Proposer une construction d'un « presque » heptagone régulier.
3. A l'aide de votre calculatrice donner une valeur approchée de :

$$\cos\frac{\pi}{7} \qquad \text{et de} \qquad \sin\frac{\pi}{7}$$

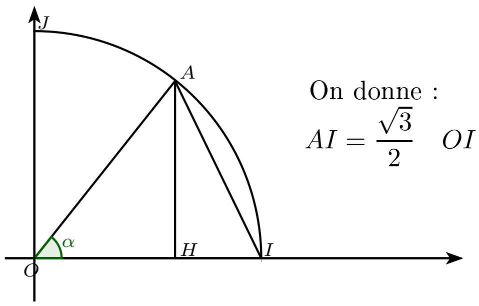
4. Proposer une nouvelle construction d'un « presque » heptagone régulier.
5. Quelle est la plus précise de vos deux constructions, pourquoi ?

Exercice 3. Dans un vieux manuel d'architecture on trouve la construction suivante, effectuée à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas, d'un « presque » heptagone régulier :



Objectif : Démontrer la presque exactitude de cette construction.

1. On considère la figure suivante :



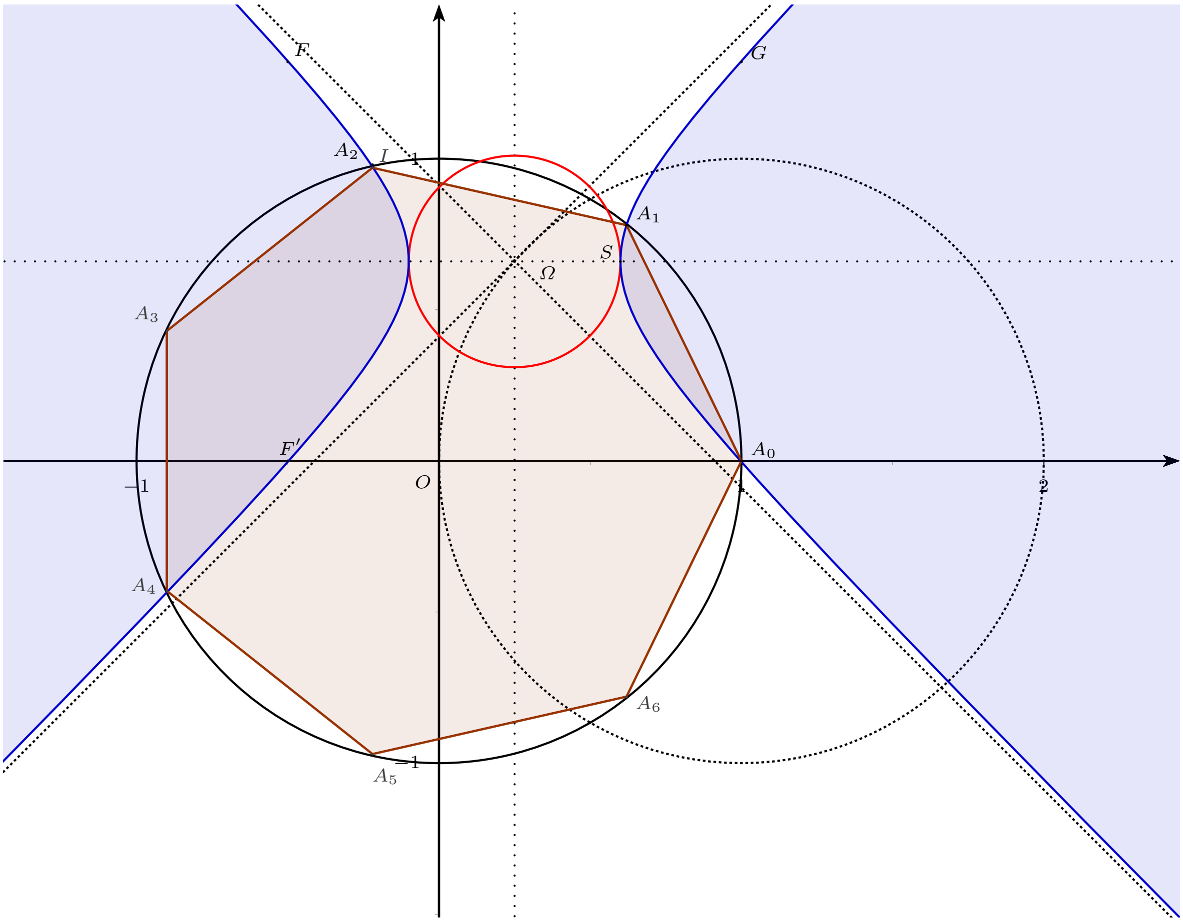
On donne :
$AI = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad OI = OA = 1$

   (a) Exprimer la longueur OH en fonction de α. En déduire la longueur IH en fonction de α.
   (b) Exprimer la longueur AH en fonction de α.
   (c) En raisonnant dans le triangle rectangle IHA démontrer que $\cos\alpha = \dfrac{5}{8}$.
   (d) En déduire la valeur de l'angle α en degré à 10^{-1} près.
   (e) Convertir en degré, à 10^{-1} près, l'angle suivant donné en radian $\beta = \dfrac{2\pi}{7}$.

2. On raisonne cette fois sur la figure trouvée dans le vieux manuel d'architecture.
   (a) Quelle est la nature du triangle ABC ?
   (b) Que représentent les droites (AL), (BO) et (CO) pour le triangle ABC ?
   (c) Préciser la longueur AL.
   (d) On note $AB = a$, en se plaçant dans le triangle rectangle ABL, déterminer a, puis donner BL. En déduire AD. En déduire enfin la longueur d'un côté du presque heptagone régulier construit par ses architectes. Conclure.

3. Proposer une construction plus simple en se servant d'une règle non graduée et d'un compas d'un segment de longueur $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Effectuer alors la construction d'un presque heptagone régulier.

Exercice 4. Nous pouvons obtenir la construction exacte de l'heptagone régulier, pour cela nous utilisons en plus de la règle et du compas, les coniques (i.e des paraboles et des hyperboles) Voici la construction que nous allons réalisé à l'aide du logiciel géogébra sans soucis de justifications.



Protocole de construction :

1. Construire un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ dont le centre est appelé O et le point de départ A_0.
2. Construire le cercle Γ de centre A_0 et de rayon 1.
3. Construire la droite d d'équation $x = \dfrac{1}{4}$.
4. Le point Ω est un des points d'intersection entre la droite d et le cercle Γ.
5. Construire les droites et Δ' d'équation respectives :

$$\Delta : y = x + \frac{\sqrt{7}-1}{4} \qquad \text{et} \qquad \Delta' : y = -x + \frac{\sqrt{7}+1}{4}$$

6. Construire la droite d' perpendiculaire à d passant par Ω.
7. Le point F est le symétrique de A_0 par rapport à Ω.
8. Le point G est le symétrique de A_0 par rapport à d'.
9. Le point F' est le symétrique de F par rapport à d'.
10. Construire le cercle $\mathscr{C}'$ de centre Ω et de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.
11. Les points S et S' sont les points d'intersection entre le cercle $\mathscr{C}'$ et la droite d', ce sont les sommets de l'hyperbole $\mathscr{H}$.
12. Construire l'hyperbole passant par les points S, A_0, F, F' G et S'.
13. L'intersection entre $\mathscr{H}$ et $\mathscr{C}$ donne les points A_1, A_2 et A_4.
14. Terminer la construction.

III. L'heptakaidecagone régulier

Théorème 1. (Gauss-Wantzel)

Un polygone à n côtés est constructible si et seulement si n est le produit d'une puissance de 2 et d'un nombre fini de nombres premiers de Fermat distincts.

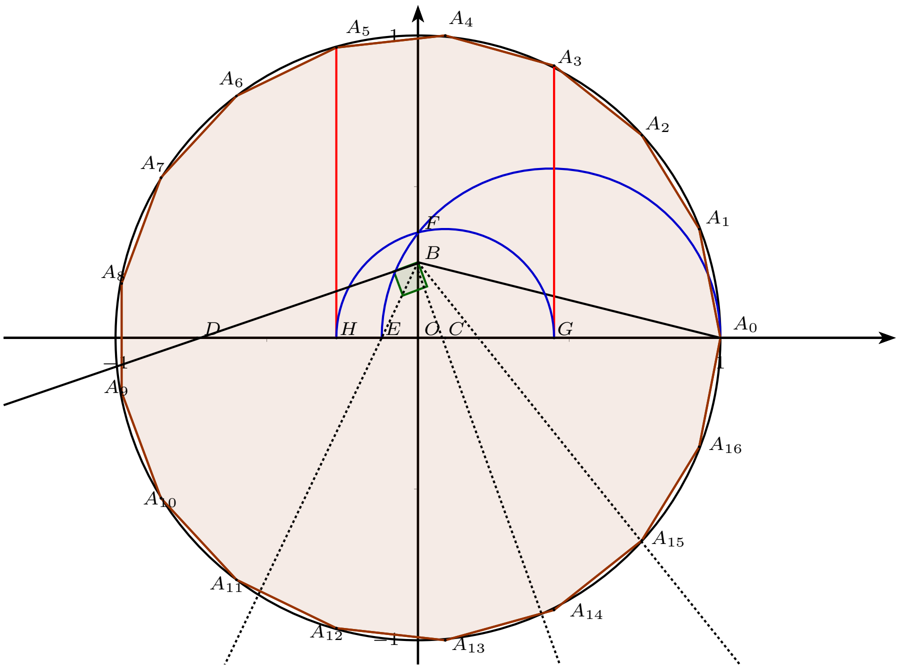
Exercice 5. Un nombre de Fermat est un entier naturel qui peut s'écrire sous la forme $2^{2^n}+1$, avec n entier. Le n-ème nombre de Fermat, $2^{2^n}+1$, est noté F_n.

1. Calculer F_0 ; F_1 ; F_2 ; F_3 et F_4.
2. Vérifier si F_0, F_1, F_2 et F_3 sont premiers.

Remarques :
- Les seuls nombres premiers de Fermat connus sont F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4.
- On sait que les nombres de Fermat de F_5 à F_{32} ne sont pas des nombres premiers.
- On ignore si F_{33} est premier ou non.

Exercice 6. En appliquant le théorème de Gauss-Wantzel, déterminer tous les polygones réguliers à n côtés pour n allant de 2 à 20 constructible à l'aide de la règle non graduée et du compas.

A titre contemplatif, voici la construction la plus célèbre de l'heptakaidecagone régulier.



Au final nous avons réalisé le calcul suivant :

$$\cos\frac{\pi}{17}=\frac{1}{16}\left(1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}+2\sqrt{34-2\sqrt{17}}+16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2\sqrt{578-34\sqrt{17}}}\right)$$

IV. Exercices d'applications

Exercice 7. Calculer les longueurs d'arcs de cercle dans les cas suivants :

1. un arc de cercle de rayon 1 et d'angle $10°$
2. un arc de cercle de rayon 10 et d'angle $10°$
3. un arc de cercle de rayon 1 et d'angle $270°$
4. un arc de cercle de rayon 3 et d'angle $45°$
5. un arc de cercle de rayon π et d'angle $80°$
6. un arc de cercle de rayon 1 et d'angle $120°$

Exercice 8. Dans le cercle trigonométrique, convertir en degré les mesures d'angles données en radians :

1. $\dfrac{\pi}{5}$
2. $\dfrac{7\pi}{5}$
3. $\dfrac{5\pi}{3}$
4. 2π
5. $\dfrac{2\pi}{3}$
6. $\dfrac{5\pi}{6}$

Définition 1.

La mesure d'un angle en radian comprise dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ est la mesure principale d'un angle en radian

Exercice 9.

1. On donne des mesures d'angles en radian, déterminer la mesure principale de chacun de ses angles :

   (a) $\dfrac{75\pi}{3}$ (b) $-\dfrac{98\pi}{5}$ (c) $\dfrac{59\pi}{11}$ (d) $-\dfrac{94\pi}{7}$

2. Ecrire un algorithme demandant de saisir une mesure d'angle en radian (i.e un nombre réel quelconque) et donnant la mesure principale de cet angle, puis le progammer.

Exercice 10. Placer sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O et d'origine I les points P, Q, R et S tels que :

1. $\widehat{IOP} = \pi$ rad
2. $\widehat{IOQ} = -\dfrac{\pi}{2}$ rad
3. $\widehat{IOR} = 6\pi$ rad
4. $\widehat{IOS} = \dfrac{7\pi}{6}$ rad

Exercice 11. Déterminer, à l'aide d'un cercle trigonométrique, les sinus et cosinus des nombres réels suivants :

1. $\dfrac{\pi}{2}$
2. $-\dfrac{\pi}{3}$
3. $\dfrac{7\pi}{3}$
4. $\dfrac{\pi}{13}$

Exercice 12. Déterminer les solutions dans $]-\pi;\pi]$ des équations suivantes :

1. $\sin x = 0,5$
2. $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\cos x = -1$
4. $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
5. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
6. $\sin x = 0$

Lycée Jean Durand david.zancanaro@wicky-math.fr.nf

Exercice 13.

1. Rappeler les valeurs exactes de $\sin\frac{\pi}{3}$ et $\cos\frac{\pi}{3}$.
2. En déduire les valeurs exactes des sinus et cosinus des réels : $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$

Exercice 14.

1. Tracer un cercle trigonométrique dans un repère orthonormé (O, I, J). Soit M tel que $\widehat{IOM} = x$ rad avec $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
2. (a) On appelle N le symétrique de M par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ}$. Donner, en fonction de x, la mesure orienté de l'angle $\widehat{ION}$

   (b) En déduire l'expression de $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$
3. En déduire l'expression de $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

Exercice 15. On considère un repère orthonormé (O, I, J) et le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$

1. Placer les points M, N et P de $\mathscr{C}$ tels que :

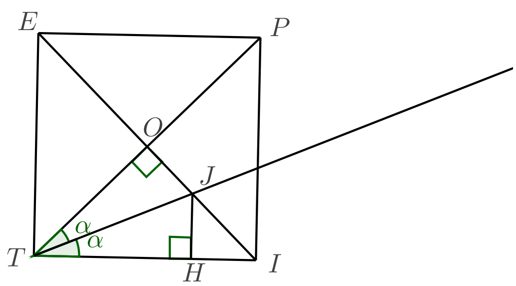
$$\widehat{IOM} = \frac{\pi}{6} \qquad \widehat{ION} = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \qquad \widehat{IOP} = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}$$

2. Démontrer que l'aire $\mathscr{A}$ du triangle MNP vaut :

$$\mathscr{A} = \frac{3\pi}{4}$$

Exercice 16.

Soit le carré PETI de côté a. Ses diagonales se coupent en O. Soit (TJ) la bissectrice de l'angle $\widehat{ITO}$ telle que le point J soit sur le segment $[OI]$. H est le projeté orthogonal de J sur (TI). L'objectif de cet exercice est de trouver les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$



1. Exprimer en fonction de a, la longueur du segment $[TO]$
2. En utilisant dans les triangles JOT et JTH le cosinus de deux angles égaux, montrer que $OT = OH$ et exprimer la longueur du segment $[TH]$ en fonction de a. En déduire HI.
3. Déterminer la nature du triangle IJH et en déduire JH en fonction de a
4. Déterminer la nature du triangle THJ et déduire des questions précédentes les longueurs des 3 côtés de ce triangle.
5. Déduire de la question précédente que :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

6. Vérifier que :

$$\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} = 1$$

Exercice 17. Soit $x \in \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ tel que $\sin x = \dfrac{1}{3}$. Déterminer $\cos x$

Exercice 18. Soit $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};0\right]$ tel que $\cos x = \dfrac{3}{5}$. Déterminer $\sin x$

Exercice 19. $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 5$ et $AD = 4$.

1. Démontrer que l'aire $\mathscr{A}$ du parallélogramme est : $\mathscr{A} = 20 \times \sin \widehat{BAD}$
2. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ si $\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{4}$
3. Pour quelles valeurs en degrés de $\widehat{BAD}$, l'aire du parallélogramme est-elle égale à 10 ?
4. Pour quelle valeur de $\widehat{BAD}$, $\mathscr{A}$ est-elle maximale ? Quelle est dans ce cas la nature du parallélogramme ?

Exercice 20. $\mathscr{C}$ est un cercle trigonométrique de centre O. Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E et F construits sur le cercle $\mathscr{C}$ ci-dessous. Justifier les réponses.