EXERCICES : FONCTIONS DE RÉFÉRENCES ET VARIATIONS

Exercice 1. Un chien errant a été signalé sur une autoroute à moins de 3 km de la borne kilométrique 50, mais à plus de 5 km de la borne 54. On appelle x le réel qui repère la position du chien sur l'autoroute.

1. Traduire l'énoncé en utilisant des valeurs absolues.
2. Entre quelles bornes kilométriques de l'autoroute ce chien peut-il se trouver ?

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x| + |2x-4|$.

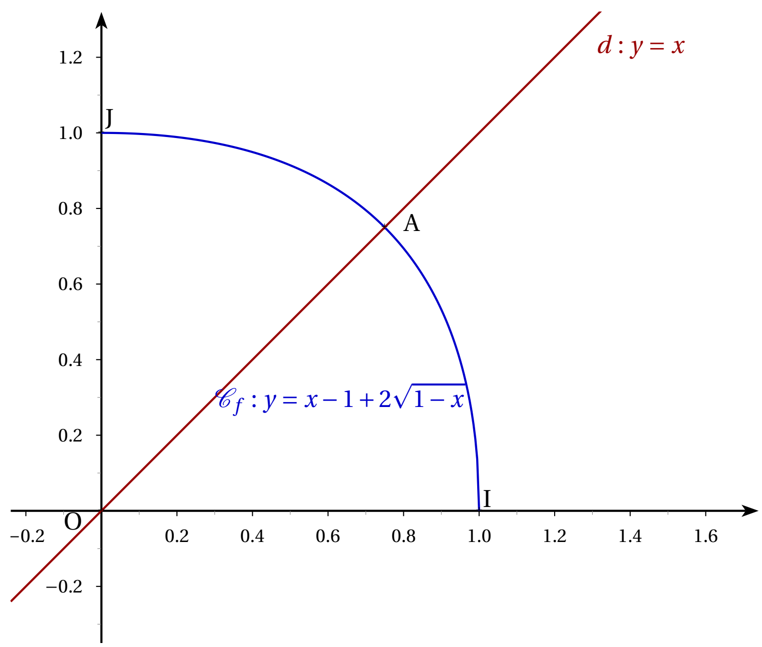
1. Déterminer, suivant les valeurs de x, l'expression de $|x|$, de $|2x-4|$, puis de $f(x)$, sans utiliser les valeurs absolues.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.
3. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Exercice 3. Dans un repère orthonormé (O, I, J), on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction g définie sur $[0;1]$ par :

$$g(x) = x - 1 + 2\sqrt{1-x}$$

ainsi que la droite d qui représente graphiquement la fonction affine f définie par $f(x) = x$.

1. Montrer que I et J sont deux points de $\mathscr{C}$.
2. La droite d coupe $\mathscr{C}$ en A. Calculer les coordonnées du point A.
3. La courbe $\mathscr{C}$ est-elle un quart de cercle de centre O ?



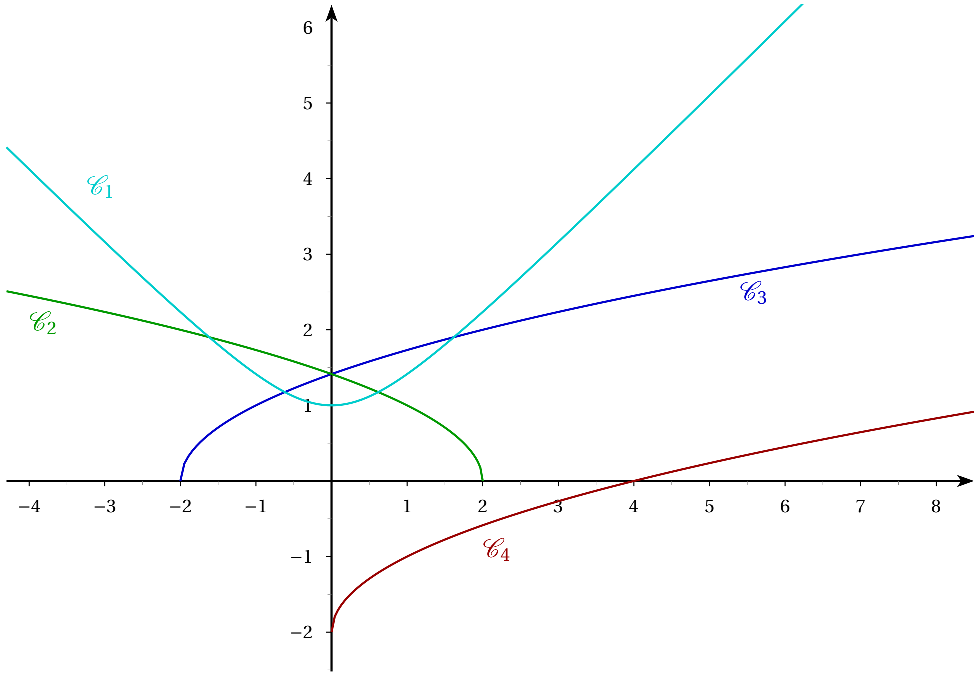
Exercice 4. Déterminer le plus grand ensemble de définition possible pour la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$
2. $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5}}$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-x}}{x}$.

Exercice 5. On a représenté graphiquement dans un repère les fonctions f, g, h et k définies par :

- $f(x) = \sqrt{x+2}$
- $g(x) = \sqrt{2-x}$
- $h(x) = \sqrt{x} - 2$
- $k(x) = \sqrt{x^2+1}$

Associer à chacune de ces fonctions la représentation graphique qui lui correspond.



Exercice 6. On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Données: x et y sont des nombres réels.
Entrer x
Si ($x > 1$) **Alors**
  $y := \dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$
Sinon
  Afficher « impossible ».
Fin Si
Afficher y

1. Tester cet algorithme pour les valeurs suivantes de x : -1, 0, 1, 2, 3 et 5.
2. Expliquer les réponses obtenues pour les valeurs de -1, 0 et 1 de x.
3. Déterminer l'expression algébrique, donnant y en fonction de x, définie par cet algorithme, ainsi que l'ensemble $\mathscr{D}$ des réels x pour lesquels elle est définie.
4. Démontrer que la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par $x \longmapsto y$ est décroissante.

Exercice 7. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ f(x) = -\sqrt{-x} & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est croissante sur $]-\infty;0]$ et sur $[0;+\infty[$. Dresser le tableau de variations de f.

2. Tracer la représentation graphique de f, notée $\mathscr{C}_f$, dans un repère orthonormé.
3. On considère un point M quelconque de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x positive.
   (a) Quelle est l'ordonnée du point M ?
   (b) Quelles sont les coordonnées du point M′ de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $-x$?
   (c) Quel est le milieu du segment [MM′] ?
   (d) Qu'en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

Exercice 8. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + |x| + 1$$

1. Ecrire $f(x)$ sans utiliser les valeurs absolues suivant les valeurs de x dans $\mathbb{R}$.
2. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthogonal.
3. Démontrer que pour tout réel x, $f(x) \geq 1$.

Exercice 9. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{|x|}$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Démontrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
3. Démontrer que f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$.
4. On considère un point quelconque M de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x positive.
   (a) Quelle est l'ordonnée du point M ?
   (b) Démontrer que le point M′ de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $-x$ a la même ordonnée que M.
   (c) Quelle propriété géométrique peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
   (d) Tracer $\mathscr{C}_f$.

Exercice 10. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1$.

1. Ecrire les expressions des fonctions g et h définies par :

$$g(x) = |f(x)| \qquad \text{et} \qquad h(x) = f(|x|)$$

2. A l'aide de la calculatrice, conjecturer les tableaux de variation des fonctions g et h puis démontrer les conjectures émises.

Exercice 11. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |x+3| + |2-x|$$

1. Ecrire, selon les valeurs de x, l'expression de $f(x)$ sans utiliser les valeurs absolues.
2. En déduire le tableau de variation de f.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leq 0$.

Exercice 12. Résoudre graphiquement, en utilisant la droite des réels :

1. $|x-2|=3$
2. $|x+5|=|3-x|$
3. $|x-5|\leq|x+1|$

Exercice 13. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x-2|-\left|-\frac{3}{2}x+1\right|$.
On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère othonormal.

1. Pour $x\in\mathbb{R}$, exprimer $f(x)$ sans valeurs absolues, puis représenter graphiquement $\mathscr{C}_f$.
2. Résoudre l'équation $f(x)=12$.

Exercice 14.

1. Ecrire un algorithme qui demande la saisie d'un nombre entier n et qui renvoie la somme des entiers naturels de 0 à n, c'est-à-dire le nombre :
$$\mathrm{S}(n)=\sum_{i=0}^{n} i=0+1+2+\cdots+n$$
2. Programmer cet algorithme sur une calculatrice ou sur algobox et donner la valeur de $\mathrm{S}(100)$.
3. Soit σ la fonction trinôme définie sur $[0;+\infty[$ par :
$$\sigma(x)=\frac{x(x+1)}{2}$$
Montrer que : $\forall x\in[0;+\infty[,\ \sigma(x+1)-\sigma(x)=x+1 \quad (\mathscr{R})$.
4. Soit $n\in\mathbb{N}$. Ecrire la relation $(\mathscr{R})$ pour $x=0,1,2,3,\ldots,n$ et en déduire $\mathrm{S}(n)$ en fonction de n.

Exercice 15. Préciser les variations de la fonction sur l'intervalle considéré.

1. $f:x\longmapsto 3-\sqrt{x}$ sur $\mathrm{I}=[0;+\infty[$.
2. $f:x\longmapsto 5-2x^2$ sur $\mathrm{I}=]-\infty;0]$.
3. $f:x\longmapsto 2|x|-6$ sur $\mathrm{I}=[0;+\infty[$.
4. $f:x\longmapsto 6-2|x|$ sur $\mathrm{I}=]-\infty;0]$.
5. $f:x\longmapsto \sqrt{x-3}$ sur $\mathrm{I}=[3;+\infty[$.
6. $f:x\longmapsto (x-7)^2$ sur $\mathrm{I}=]-\infty;7]$.
7. $f:x\longmapsto |x+2|$ sur $\mathrm{I}=[-2;+\infty[$.
8. $f:x\longmapsto |x+2|$ sur $\mathrm{I}=]-\infty;-2]$.

Exercice 16. Ecrire sans valeur absolue puis représenter la fonction f définie par :

1. $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$ sur $\mathbb{R}^*$
2. $f(x)=x|x|$ sur $\mathbb{R}$
3. $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ sur $\mathbb{R}^*$
4. $f(x)=|x|$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 17.

1. Montrer que la somme de deux fonctions croissantes (respectivement décroissantes) sur I est une fonction croissante (respectivement décroissante) sur I.
2. Qu'en est-il du produit de deux fonctions croissantes ? de deux fonctions décroissantes ?

Exercice 18. On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction f définie par :
$$f(x)=|x-4|+|x+6|$$

1. Ecrire $|x-4|$ et $|x+6|$ sans valeur absolue.
2. Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue.

Exercice 19. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 5}{x - 3}$$

On souhaite étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ représentant f par rapport à la droite d d'équation $y = x - 2$.

1. Etudier le signe de $f(x) - (x - 2)$.
2. En déduire les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite d.
3. Décrire la façon dont évolue la valeur de $f(x) - (x - 2)$ lorsque x devient grand [1]
   Interpréter géométriquement ce phénomène.

Exercice 20.

PARTIE A. **Une fonction auxiliaire**

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^2 + 4x + 5$$

1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1$$
2. En déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \geq 0$$
3. Dresser le tableau de variation de g

PARTIE B. **Etude d'une fonction composée**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$$

1. Expliquer pourquoi f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Etablir que la fonction f admet un minimum à préciser.

1. On pourra faire les calculs pour $x = 10^2$, $x = 10^3$ et $x = 10^6$.

Exercice 21. Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x - 4\sqrt{x} + 4$$

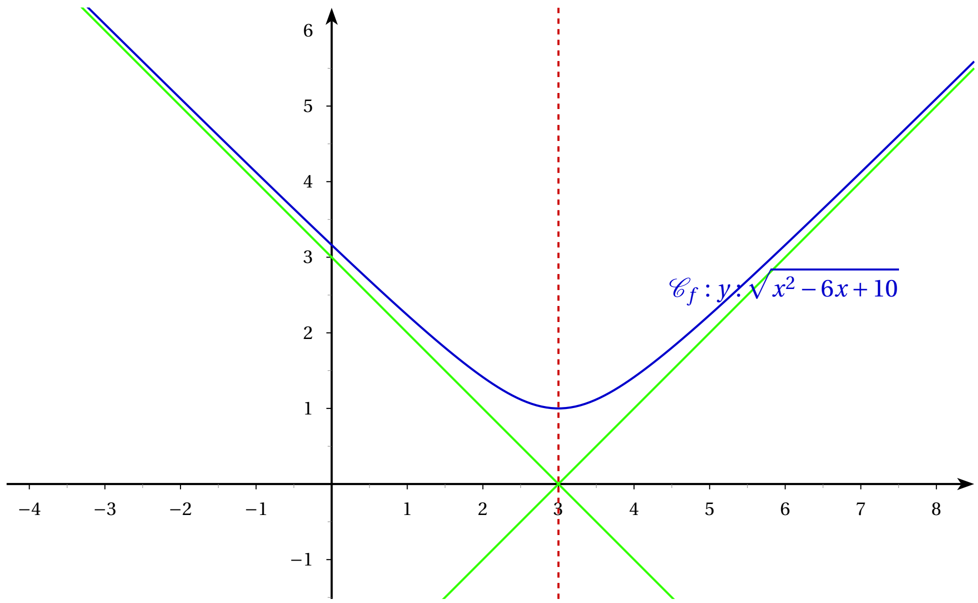
1. « g est la somme de fonctions monotones sur l'intervalle $[0;+\infty[$, elle est donc monotone sur cet intervalle. » Que penser de cette affirmation ?
2. Montrer que :
$$\forall x \in [0;+\infty[, \quad g(x) = \left(\sqrt{x} - 2\right)^2$$
3. En déduire les variations de la fonction g sur son ensemble de définition. [2]
4. La fonction g admet-elle un minimum ? Si oui lequel ?
5. Traduire en langage courant la proposition :
$$\forall \mathrm{M} \geq 0, \exists x \in [0;+\infty[, f(x) \geq \mathrm{M}$$
Démontrer cette proposition.
6. Quelle nouvelle information, relative au tableau de variations de la fonction f, cette proposition apporte-t-elle ?

Exercice 22. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$$

1. Ecrire le trinôme sous forme canonique.
2. Lorsque h parcourt $\mathbb{R}$, quelle propriété géométrique les points de coordonnées $\big(3-h; f(3-h)\big)$ et $\big(3+h; f(3+h)\big)$ vérifient-ils ?
3. Qu'en déduit-on sur la représentation graphique de la fonction f ?
4. Montrer que la fonction f est décroissante, puis croissante sur des intervalles que l'on précisera.
5. f admet-elle un minimum ?
6. Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$, $\mathrm{M} \geq 1$.
   (a) Montrer que l'équation $f(x) = \mathrm{M}$ admet une ou deux solutions.
   (b) Interpréter en langage courant la proposition :
   $$\forall \mathrm{M} \geq 1, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq \mathrm{M}$$
   puis la démontrer.
   (c) Quelle nouvelle information, relative au tableau de variations de la fonction f, cette proposition apporte-t-elle ?
   (d) Montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - (x-3) = \frac{1}{f(x) + x - 3}$$
   (e) En déduire que l'affirmation « le nombre (positif) "$f(x) - (x-3)$" peut être rendu aussi petit que l'on veut à condition que x positif soit suffisamment grand » est vraie.
   (f) Justifier alors les différents éléments graphiques de la représentation graphique ci-dessous sachant que la courbe est tracée en bleue :

2. On pourra utiliser les variations de f en raisonnant successivement dans l'intervalle $[0;4]$ puis dans l'intervalle $]4;+\infty[$



Exercice 23. Soit la fonction R définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$R(x) = |36x^2 - 810x + 2753|$$

1. Quel est le plus grand entier inférieur ou égal à $\sqrt{2753}$? Soit N cet entier naturel que l'on nomme **partie entière de** $\sqrt{2753}$ et que l'on note E(2753).
2. Soit $d \in \mathbb{N}*$ le plus petit des diviseurs de R(0) = 2753. Voici une liste d'entier : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.
   (a) Quelle propriété arithmétique ces entiers vérifient-ils ?
   (b) Vérifier qu'aucun de ces ne divise 2753.
   (c) En déduire que $d \geq 53$.
   (d) A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer qu'il ne peut exister d'entier d, strictement supérieur à 1 et strictement inférieur à 2753 qui soit un diviseur de 2753.
   (e) Quelle conclusion peut-on faire au sujet de 2753 ?
3. Etablir un raisonnement analogue pour R(1).
   Conclure sur la nature de ce nombre.
4. Ecrire sur une calculatrice ou sur algobox un algorithme qui :
   – demande la saisie d'un entier naturel n supérieur ou égal à 2 ;
   – teste, pour i allant de 2 à E($\sqrt{n}$) de 1 en 1, si i divise n et renvoie *vraie* si l'entier n est premier et *faux* sinon.
5. Coder une calculatrice ou algobox un algorithme qui :
   – demande la saisie d'un entier naturel m
   – renvoie, pour j allant de 0 à m de 1 en 1, la réponse du test de primalité (établi à la question précédente) de l'entier R(j).
   En déduire combien d'entiers premiers successifs, la fonction R génère lorsque x prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, ...

Histoire des sciences

– En 1772, Leonhard Euler, proposa la formule :

$$E(n) = n^2 + n + 41$$

qui donne des nombres premiers pour n allant de 0 à 39.

– En 1798, le mathématicien français Adrien-Marie Legendre proposa le polynôme du second degré suivant :

$$L(n) = 2n^2 + 29$$

qui produit des nombres premiers pour n allant de 0 à 28.

– Aujourd'hui, le record est détenu par Russel Ruby qui proposa en 1987 l'expression :

$$R(n) = 36n^2 - 810n + 2753$$

L'expression $|R(n)|$ fournit le plus grand nombre consécutifs de nombres premiers.

Exercice 24. (Olympiades)

On définit pour chaque couple de réel $(a; b)$ la fonction f par :

$$f(x) = a - \sqrt{x+b}$$

Deux nombres réels u et v sont dits *échangeables* s'il existe au moins un couple de réels $(a; b)$ tel que la fonction f vérifie à la fois $f(u) = v$ et $f(v) = u$.

1. Montrer que 2 et 3 sont échangeables.
2. Peut-on dire autant de 4 et 7 ?
3. A quelle condition deux **entiers** u et v sont-ils échangeables ?

Les quantificateurs ∃ et ∀.

Soit $\mathscr{P}(x)$ une proposition dépendant d'un élément x d'un ensemble E. La valeur de vérité de $\mathscr{P}(x)$ peut dépendre de x. Elle peut être vraie pour au moins un x, pour un et un seul x, ou encore pour tout x...

Définition 1. (Le quantificateur existentiel ∃)

- **Définition** :
  Le symbole ∃ est appelé le quantificateur existentiel et signifie « il existe au moins un ».
- **Exemple** :
  « Il existe un nombre réel x tel que $x^2 - 4x + 3 = 0$ » se traduit en langage formel par : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + 3 = 0$
- **Remarque** :
  La proposition est vraie si $x = 1$, en effet $1^2 - 4 + 3 = 0$. Cependant elle est encore vraie pour $x = 3$. Le quantificateur ∃ n'implique pas l'unicité.
  En revanche la proposition $x - 3 = 0$ est vraie seulement pour $x = 3$, on note alors : $\exists! x, x - 3 = 0$
- **Démontrer une existence** :
  Soit $\mathscr{P}(x)$ une propriété dépendant d'un nombre x. Pour montrer qu'il existe un réel x tel que $\mathscr{P}(x)$ est vraie, il suffit de trouver un exemple de valeur de x qui vérifie la propriété.

Définition 2. (Le quantificateur universel ∀)

- **Définition** :
  Le symbole ∀ est appelé le quantificateur universel et signifie « pour tout ».
- **Exemple** :
  « Pour tout nombre réel $x \geq 3$, on a $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ » se traduit en langage formel par : $\forall x \geq 3, x^2 - 4x + 3 \geq 0$
- **Remarque** :
  La proposition traduit la propriété : si $x \geq 3$ alors $x^2 - 4x + 3 \geq 0$. On peut avoir l'existence d'un réel $x < 3$ tel que $x^2 - 4x + 3 \geq 0$. Il ne s'agit pas d'un si et seulement si.
- **Démontrer « pour tout ... »** :
  Soit $\mathscr{P}(x)$ une propriété dépendant d'un nombre x. Montrer que pour tout nombre réel x, $\mathscr{P}(x)$ est vraie nécessite un raisonnement qui établira qu'en remplaçant x par n'importe quel nombre réel la propriété $\mathscr{P}$ sera toujours vraie.

Exercice 25. ∀ ou ∃ ?

L'égalité $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$ est-elle vraie pour un réel x au moins ou pour tout réel x ?

Exercice 26.

1. Traduire en langage courant les propositions mathématiques suivantes :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$
   (b) $\exists x \in \mathbb{R}, x \neq 2, \dfrac{3}{x-2} = 5$
   (c) $\forall \epsilon > 0, \exists x > 0, \dfrac{1}{x} < \epsilon$
   (d) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in [3; +\infty[, -2x^2 + 6x + 1 \geq M$
2. Ajouter devant chaque proposition, un quantificateur possible en justifiant.
   (a) $\ldots, |x-3| = 2$
   (b) $\ldots, |x-3| > 2$
   (c) $\ldots, \dfrac{1-6x}{2x+5} = -3$
   (d) $\ldots, 4\sqrt{2x+7} > x + 11$