CORRECTION DE L'INTERROGATION N°9

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (7 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   (a) $2x^2-5x+9=0$
   On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times9=25-72=-47<0$.
   Ce trinôme n'admet donc aucune racine.
   $$\mathscr{S}=\emptyset$$

   (b) $-x^2+10x-1=0$
   On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac=10^2-4\times(-1)\times(-1)=100-4=96$.
   Ce trinôme admet donc deux racines :
   $$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-10-\sqrt{96}}{-2}=\frac{10+\sqrt{96}}{2}\qquad\text{et}\qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-10+\sqrt{96}}{-2}=\frac{10-\sqrt{96}}{2}$$
   $$\mathscr{S}=\left\{\frac{10+\sqrt{96}}{2};\frac{10-\sqrt{96}}{2}\right\}$$

   (c) $9x^2-6x+1=0$
   On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times9\times1=36-36=0$.
   Ce trinôme admet donc une racine double :
   $$x=\frac{-b}{2a}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$$
   $$\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{3}\right\}$$

   (d) $7x^2+3x=0\iff x(7x+3)=0\iff x=0\quad\text{ou}\quad 7x+3=0\iff x=0\quad\text{ou}\quad x=-\frac{3}{7}$
   $$\mathscr{S}=\left\{-\frac{3}{7};0\right\}$$

2. Déterminer les points d'intersection entre la représentation graphique $\mathscr{P}$ de la fonction f et la droite $\mathscr{D}$ dans les cas suivants :

   (a) $f(x)=4x^2-5x+1$ et $\mathscr{D}: y=3x-1$.
   On cherche les abscisses x de ces points en résolvant l'équation $f(x)=y$ i.e :
   $$4x^2-5x+1=3x-1\iff 4x^2-8x+2=0\iff 2x^2-4x+1=0$$
   On est amené à chercher les racines d'un trinôme du second degré.
   $$\Delta=b^2-4ac=16-8=8$$
   $$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8-\sqrt{8}}{4}=\frac{8-2\sqrt{2}}{4}=\frac{4-\sqrt{2}}{2}\qquad\text{et}\qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8+\sqrt{8}}{4}=\frac{4+\sqrt{2}}{2}$$
   L'ordonnée du point d'abscisse $\frac{4-\sqrt{2}}{2}$ est $3\times\frac{4-\sqrt{2}}{2}-1$ et celle du point d'abscisse $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$ est $3\times\frac{4+\sqrt{2}}{2}-1$. Ainsi $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ ont deux points d'intersection que nous noterons A et B dont les coordonnées sont :
   $$\mathrm{A}\left(\frac{4-\sqrt{2}}{2};3\times\frac{4-\sqrt{2}}{2}-1\right)\qquad\text{et}\qquad\mathrm{B}\left(\frac{4+\sqrt{2}}{2};3\times\frac{4+\sqrt{2}}{2}-1\right)$$

   (b) $f(x)=-x^2+10x-1$ et $\mathscr{D}: y=2$.
   On cherche les abscisses x de ces points en résolvant l'équation $f(x)=y$ i.e :
   $$-x^2+10x-1=2\iff x^2-10x+3=0$$
   On est amené à chercher les racines d'un trinôme du second degré.
   $$\Delta=b^2-4ac=100-12=88$$
   $$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10-\sqrt{88}}{2}\qquad\text{et}\qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10+\sqrt{88}}{2}$$
   L'ordonnée du point d'abscisse $\frac{10-\sqrt{88}}{2}$ est 2 et celle du point d'abscisse $\frac{10+\sqrt{88}}{2}$ est 2. Ainsi $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ ont deux points d'intersection que nous noterons A et B dont les coordonnées sont :
   $$\mathrm{A}\left(\frac{10-\sqrt{88}}{2};2\right)\qquad\text{et}\qquad\mathrm{B}\left(\frac{10+\sqrt{88}}{2};2\right)$$

Exercice 2. (3 points)

Déterminer les dimensions d'un rectangle d'aire S = 10 cm^2 et de périmètre P = 15 cm.

Notons x et y les dimensions de ce rectangle, on a alors $xy = 10$ et $2x + 2y = 15 \Longleftrightarrow 2y = 15 - 2x \Longleftrightarrow y = 7,5 - x$.
Par conséquent

$$x(7,5 - x) = 10 \Longleftrightarrow 7,5x - x^2 = 10 \Longleftrightarrow x^2 - 7,5x + 10 = 0$$

On cherche les racines de ce trinôme.

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{15}{2}\right)^2 - 40 = \frac{225}{4} - \frac{160}{4} = \frac{65}{4}$$

Il existe donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7,5 - \sqrt{\frac{65}{4}}}{2} = \frac{15 - \sqrt{65}}{4} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7,5 + \sqrt{\frac{65}{4}}}{2} = \frac{15 + \sqrt{65}}{4}$$

Lorsque $x = \dfrac{15 - \sqrt{65}}{4}$ alors $y = 7,5 - x = 7,5 - \dfrac{15 - \sqrt{65}}{4} = \dfrac{30 - 15 + \sqrt{65}}{4} = \dfrac{15 + \sqrt{65}}{4}$.
De même si $x = \dfrac{15 + \sqrt{65}}{4}$ alors $y = 7,5 - x = 7,5 - \dfrac{15 + \sqrt{65}}{4} = \dfrac{30 - 15 - \sqrt{65}}{4} = \dfrac{15 - \sqrt{65}}{4}$.
Dans les deux cas on trouve que ce rectangle a pour longueur $\text{L} = \dfrac{15 + \sqrt{65}}{4}$ et pour largeur $\ell = \dfrac{15 - \sqrt{65}}{4}$

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°9

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (7 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $2x^2 - 5x - 9 = 0$
On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-9) = 25 + 72 = 97$.
Ce trinôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - \sqrt{97}}{4} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + \sqrt{97}}{4}$$

$$\mathscr{S} = \left\{\frac{5 - \sqrt{97}}{4}; \frac{5 + \sqrt{97}}{4}\right\}$$

(b) $-x^2 + x - 10 = 0$
On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-1) \times (-10) = 1 - 40 = -39 < 0$.
Ce trinôme n'admet donc aucune racine.

$$\mathscr{S} = \emptyset$$

(c) $16x^2 - 8x + 1 = 0$
On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 16 \times 1 = 64 - 64 = 0$.
Ce trinôme admet donc une racine double :

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$$\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{4}\right\}$$

(d) $7x^2 - 3 = 0 \Longleftrightarrow 7x^2 = 3 \Longleftrightarrow x^2 = \dfrac{3}{7} \Longleftrightarrow x = -\sqrt{\dfrac{3}{7}} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$

$$\mathscr{S} = \left\{-\sqrt{\frac{3}{7}}; \sqrt{\frac{3}{7}}\right\}$$

2. Déterminer les points d'intersection entre la représentation graphique $\mathscr{P}$ de la fonction f et la droite $\mathscr{D}$ dans les cas suivants :

(a) $f(x) = 4x^2 + 5x - 1$ et $\mathscr{D} : y = 3x - 1$.
On cherche les abscisses x de ces points en résolvant l'équation $f(x) = y$ i.e :

$$4x^2 + 5x - 1 = 3x - 1 \Longleftrightarrow 4x^2 + 2x = 0 \Longleftrightarrow 2x(2x+1) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \qquad \text{ou} \qquad x = -\frac{1}{2}$$

L'ordonnée du point d'abscisse 0 est $3 \times 0 - 1 = -1$ et celle du point d'abscisse $-\frac{1}{2}$ est $3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{5}{2}$. Ainsi $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ ont deux points d'intersection que nous noterons A et B dont les coordonnées sont :

$$\mathrm{A}\,(0; -1) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}\left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$$

(b) $f(x) = -x^2 + x - 10$ et $\mathscr{D} : y = 2$.
On cherche les abscisses x de ces points en résolvant l'équation $f(x) = y$ i.e :

$$-x^2 + x - 10 = 2 \Longleftrightarrow x^2 - x + 12 = 0$$

On est amené à chercher les racines d'un trinôme du second degré.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 48 = -47 < 0$$

Ce trinôme n'admet pas de racine. Ainsi $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ n'ont pas de points d'intersection

Exercice 2. (3 points)

Déterminer les dimensions d'un rectangle d'aire S = 12 cm^2 et de périmètre P = 16 cm.

Notons x et y les dimensions de ce rectangle, on a alors $xy = 12$ et $2x + 2y = 16 \Longleftrightarrow 2y = 16 - 2x \Longleftrightarrow y = 78 - x$.
Par conséquent

$$x(8 - x) = 12 \Longleftrightarrow 8x - x^2 = 12 \Longleftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$$

On cherche les racines de ce trinôme.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 48 = 64 - 48 = 16$$

Il existe donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 - 4}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 + 4}{2} = 6$$

Lorsque $x = 2$ alors $y = 8 - x = 8 - 2 = 6$.
De même si $x = 6$ alors $y = 8 - x = 8 - 6 = 2$.
Dans les deux cas on trouve que ce rectangle a pour longueur $\mathrm{L} = 6$ et pour largeur $\ell = 2$