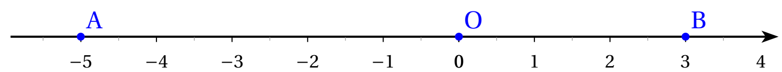
CORRECTION DE L'INTERROGATION N°3

Exercice 1. Valeurs Absolues (10 points)

Sur une droite graduée, les points A et B ont pour abscisses respectives -5 et 3.

On cherche à déterminer tous les points M de la droite (AB) vérifiant $AM \geq 2BM$. On note x l'abscisse de M.



1. Le point O appartient-il à l'ensemble recherché ?
   La distance $AO = 5$ et la distance $BO = 3$, or $2 \times 3 = 6 \geq 5$, par conséquent O n'appartient pas à l'ensemble recherché.
2. Exprimer les distances AM et BM en fonction de x, en utilisant la valeur absolue.

$$AM = d(A;M) = d(-5, x) = |-5 - x| = |x+5| \qquad \text{et} \qquad BM = d(B;M) = d(3;x) = |3-x| = |x-3|$$

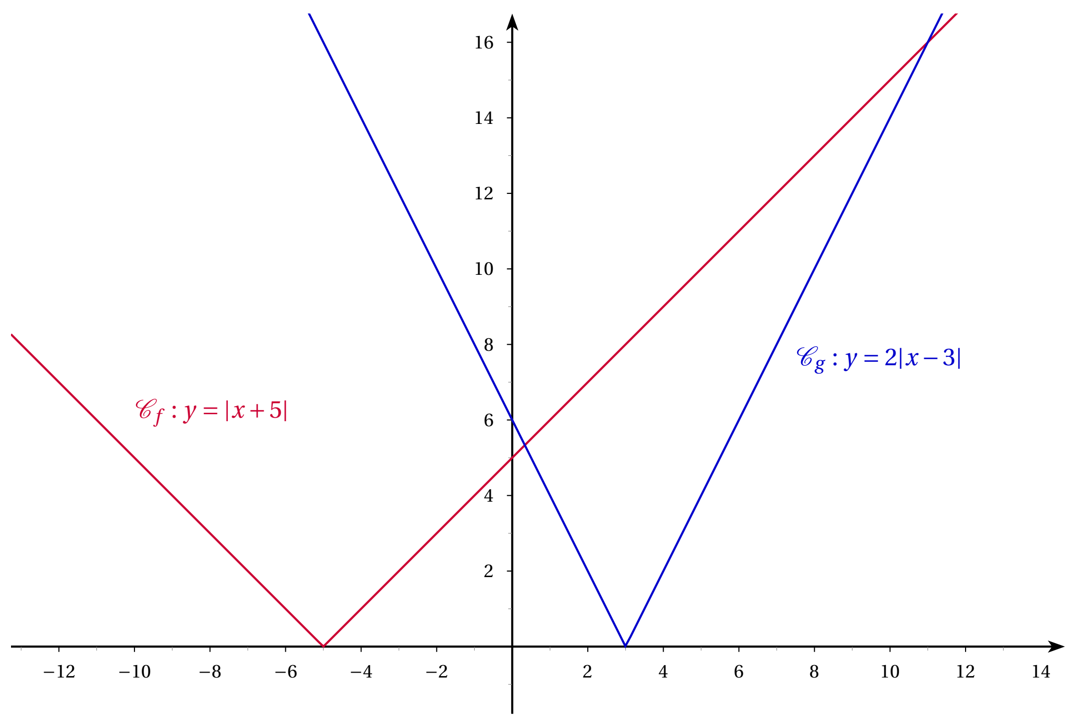
3. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x+5|$ et $g(x) = 2|x-3|$
   (a) Ecrire $f(x)$ sans utiliser les valeurs absolues, en distinguant les cas $x \leq -5$ et $x \geq -5$.

$$f(x) = |x+5| = \begin{cases} x+5 & \text{lorsque} \quad x \geq -5 \\ -x-5 & \text{lorsque} \quad x \leq -5 \end{cases}$$

   (b) Ecrire $g(x)$ sans utiliser les valeurs absolues, en distinguant deux cas.

$$g(x) = 2|x-3| = \begin{cases} 2(x-3) & \text{lorsque} \quad x-3 \geq 0 \\ -2(x-3) & \text{lorsque} \quad x-3 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-6 & \text{lorsque} \quad x \geq 3 \\ -2x+6 & \text{lorsque} \quad x \leq 3 \end{cases}$$

4. **PARTIE A.** **Résolution graphique**
   (a) Dans un même repère représenter graphiquement les courbes des fonctions f et g, que l'on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



   (b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.
   Graphiquement, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ pour $x \in \left[\frac{1}{3}; 11\right]$ à l'erreur graphique près.
   (c) Conclure.
   Nous pouvons conclure que les points M vérifiant $AM \geq 2BM$ ont une abscisse comprise entre $\frac{1}{3}$ et 11 à l'erreur graphique près.
5. **PARTIE B.** **Résolution algébrique**
   On doit résoudre l'inéquation (I) : $|x+5| \geq 2|x-3|$, en vous servant de la question 3., résoudre (I) dans chacun des cas suivants, puis conclure :

(a) lorsque $x \leq -5$.

Lorsque $x \leq -5$, d'après la question 3. on a $f(x) = -x-5$ et $g(x) = -2x+6$. Par conséquent on cherche les réels x inférieur à -5 vérifiant :

$$\begin{aligned} & f(x) \geq g(x) \\ \iff & -x-5 \geq -2x+6 \\ \iff & -x+2x \geq 6+5 \\ \iff & x \geq 11 \end{aligned}$$

Il n'y a donc aucun réel inférieur à -5 tel que $f(x) \geq g(x)$.

(b) lorsque $-5 \leq x \leq 3$.

Lorsque $-5 \leq x \leq 3$, d'après la question 3. on a $f(x) = x+5$ et $g(x) = -2x+6$. Par conséquent on cherche les réels x compris entre -5 et 3 vérifiant :

$$\begin{aligned} & f(x) \geq g(x) \\ \iff & x+5 \geq -2x+6 \\ \iff & x+2x \geq 6-5 \\ \iff & 3x \geq 1 \\ \iff & x \geq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ainsi pour $x \in \left[\frac{1}{3};3\right]$ on a $f(x) \geq g(x)$.

(c) lorsque $x \geq 3$.

Lorsque $x \geq 3$, d'après la question 3. on a $f(x) = x+5$ et $g(x) = 2x-6$. Par conséquent on cherche les réels x supérieur ou égaux à 3 vérifiant :

$$\begin{aligned} & f(x) \geq g(x) \\ \iff & x+5 \geq 2x-6 \\ \iff & x-2x \geq -6-5 \\ \iff & -x \geq -11 \\ \iff & x \leq 11 \end{aligned}$$

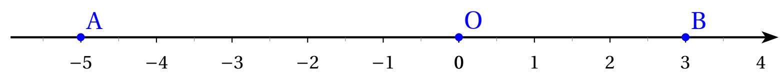
Ainsi lorsque $x \in [3;11]$ on a $f(x) \geq g(x)$.

Bilan : Pour tout $x \in \left[\frac{1}{3};11\right]$ on a $f(x) \geq g(x)$ i.e AM $\geq$ 2BM. L'ensemble des points M recherché est l'ensemble des points ayant une abscisse comprise entre $\frac{1}{3}$ et 11.

Exercice 1. Valeurs Absolues (10 points)

Sur une droite graduée, les points A et B ont pour abscisses respectives −5 et 3.

On cherche à déterminer tous les points M de la droite (AB) vérifiant AM ≥ 3BM. On note x l'abscisse de M.



1. Le point O appartient-il à l'ensemble recherché ?

   La distance AO = 5 et la distance BO = 3, or $3 \times 3 = 9 \geq 5$, par conséquent O n'appartient pas à l'ensemble recherché.

2. Exprimer les distances AM et BM en fonction de x, en utilisant la valeur absolue.

$$\mathrm{AM} = d(\mathrm{A};\mathrm{M}) = d(-5,x) = |-5-x| = |x+5| \qquad \text{et} \qquad \mathrm{BM} = d(\mathrm{B};\mathrm{M}) = d(3;x) = |3-x| = |x-3|$$

3. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x+5|$ et $g(x) = 3|x-3|$

   (a) Ecrire $f(x)$ sans utiliser les valeurs absolues, en distinguant les cas $x \leq -5$ et $x \geq -5$.

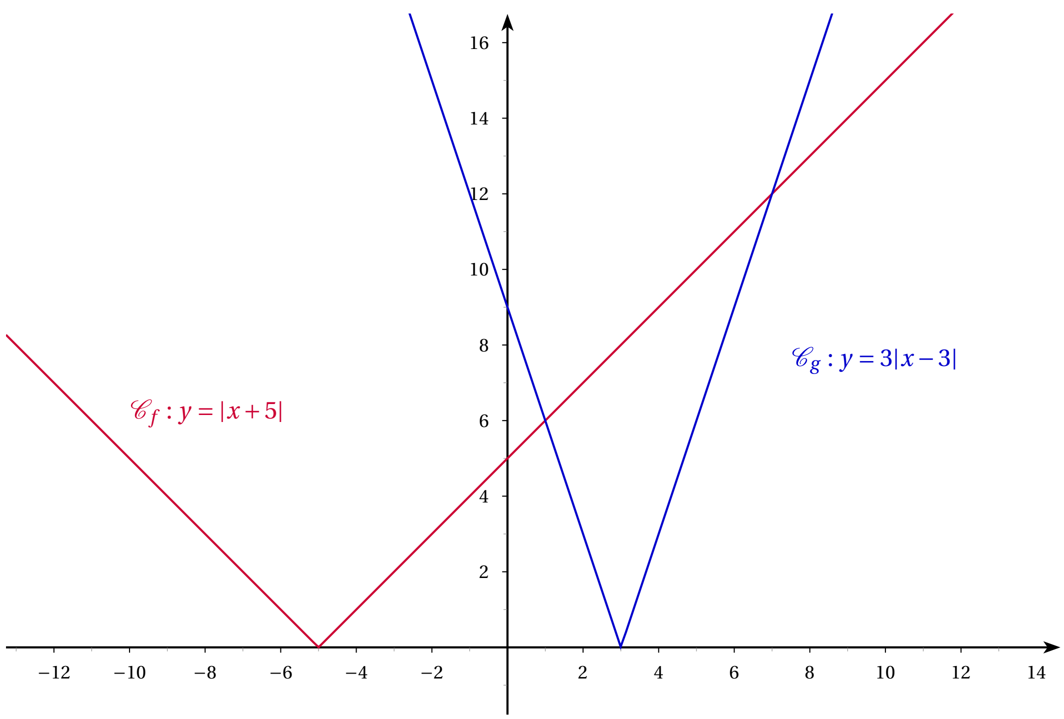
$$f(x) = |x+5| = \begin{cases} x+5 & \text{lorsque} \quad x \geq -5 \\ -x-5 & \text{lorsque} \quad x \leq -5 \end{cases}$$

   (b) Ecrire $g(x)$ sans utiliser les valeurs absolues, en distinguant deux cas.

$$g(x) = 3|x-3| = \begin{cases} 3(x-3) & \text{lorsque} \quad x-3 \geq 0 \\ -3(x-3) & \text{lorsque} \quad x-3 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x-9 & \text{lorsque} \quad x \geq 3 \\ -3x+9 & \text{lorsque} \quad x \leq 3 \end{cases}$$

4. **PARTIE A.** **Résolution graphique**

   (a) Dans un même repère représenter graphiquement les courbes des fonctions f et g, que l'on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



   (b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.

   Graphiquement, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ pour $x \in [1;7]$ à l'erreur graphique près.

   (c) Conclure.

   Nous pouvons conclure que les points M vérifiant AM ≥ 3BM ont une abscisse comprise entre 1 et 7 à l'erreur graphique près.

5. **PARTIE B.** **Résolution algébrique**

   On doit résoudre l'inéquation (I) : $|x+5| \geq 3|x-3|$, en vous servant de la question 3., résoudre (I) dans chacun des cas suivants, puis conclure :

(a) lorsque $x \leq -5$.

Lorsque $x \leq -5$, d'après la question 3. on a $f(x) = -x - 5$ et $g(x) = -3x + 9$. Par conséquent on cherche les réels x inférieur à -5 vérifiant :

$$\begin{aligned} & f(x) \geq g(x) \\ \Longleftrightarrow \quad & -x - 5 \geq -3x + 9 \\ \Longleftrightarrow \quad & -x + 3x \geq 9 + 5 \\ \Longleftrightarrow \quad & 2x \geq 14 \\ \Longleftrightarrow \quad & x \geq 7 \end{aligned}$$

Il n'y a donc aucun réel inférieur à -5 tel que $f(x) \geq g(x)$.

(b) lorsque $-5 \leq x \leq 3$.

Lorsque $-5 \leq x \leq 3$, d'après la question 3. on a $f(x) = x + 5$ et $g(x) = -3x + 9$. Par conséquent on cherche les réels x compris entre -5 et 3 vérifiant :

$$\begin{aligned} & f(x) \geq g(x) \\ \Longleftrightarrow \quad & x + 5 \geq -3x + 9 \\ \Longleftrightarrow \quad & x + 3x \geq 9 - 5 \\ \Longleftrightarrow \quad & 4x \geq 4 \\ \Longleftrightarrow \quad & x \geq 1 \end{aligned}$$

Ainsi pour $x \in [1;3]$ on a $f(x) \geq g(x)$.

(c) lorsque $x \geq 3$.

Lorsque $x \geq 3$, d'après la question 3. on a $f(x) = x + 5$ et $g(x) = 3x - 9$. Par conséquent on cherche les réels x supérieur ou égaux à 3 vérifiant :

$$\begin{aligned} & f(x) \geq g(x) \\ \Longleftrightarrow \quad & x + 5 \geq 3x - 9 \\ \Longleftrightarrow \quad & x - 3x \geq -9 - 5 \\ \Longleftrightarrow \quad & -2x \geq -14 \\ \Longleftrightarrow \quad & x \leq 7 \end{aligned}$$

Ainsi lorsque $x \in [3;7]$ on a $f(x) \geq g(x)$.

Bilan : Pour tout $x \in [1;7]$ on a $f(x) \geq g(x)$ i.e AM $\geq$ 3BM. L'ensemble des points M recherché est l'ensemble des points ayant une abscisse comprise entre 1 et 7.