Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

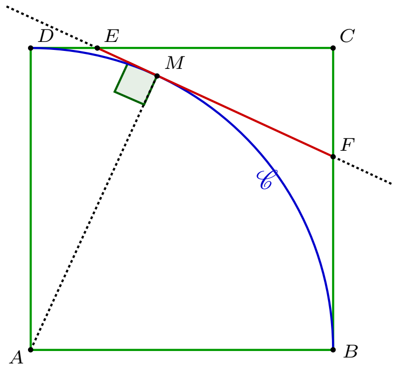
Correciton de l'interrogation n°20

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (10 points)

$ABCD$ est un carré de côté 10. $\mathscr{C}$ est le quart de cercle de centre A et de rayon AB contenu dans le carré $ABCD$. M est un point quelconque de $\mathscr{C}$. La tangente à $\mathscr{C}$ en M coupe les segments $[BC]$ et $[CD]$ en E et en F.

On se propose de trouver la position du point M sur $\mathscr{C}$ pour que la longueur EF soit minimale.



On pose $BF = x$ et $DE = y$. Le réel x appartient à l'intervalle $[0; 10]$.

1. En comparant successivement dans les triangles AMF et ABF justifier que $MF = x$. Procéder de même pour justifier que $ME = y$. En déduire que
$$EF = x + y$$

AM et AB sont deux rayons d'un même cercle donc $AM = AB$, de plus les triangles AMF et ABF sont tous deux rectangles et possèdent la même hypoténuse. Leur troisième côté est donc de mesure identique, i.e :
$$MF = BF = x$$
On procède de la même manière dans les triangles ABE et ADE pour montrer que $ME = y$.
Par conséquent :
$$EF = EM + MF = y + x = x + y$$

2. En considérant le triangle CEF, démontrer que :
$$EF^2 = x^2 + y^2 - 20x - 20y + 200$$
puis, en utilisant le fait que $EF = x + y$, que
$$y(2x + 20) = -20x + 200$$

Le triangle CEF est rectangle, Pythagore donne :
$$EF^2 = CE^2 + CF^2 \iff (x+y)^2 = (10-x)^2 + (10-y)^2 \iff EF^2 = x^2 + y^2 - 20x - 20y + 200$$
et comme $EF = x + y$ on a :
$$(x+y)^2 = x^2+y^2-20x-20y+200 \iff x^2+2xy+y^2 = x^2+y^2-20x-20y+200 \iff 2xy+20y = -20x+200$$
d'où :
$$y(2x + 20) = -20x + 200$$

3. En déduire que $y = \dfrac{100 - 10x}{x + 10}$

Comme $y(2x+20) = -20x + 200 \iff y = \dfrac{-20x + 20}{2x + 20} = \dfrac{100 - 10x}{x + 10}$

4. En déduire enfin que que $EF = x + y = \dfrac{x^2 + 100}{x + 10}$.
$$EF = x + y = x + \frac{100 - 10x}{x + 10} = \frac{x^2 - 10x + 100 - 10x}{x + 10} = \frac{x^2 + 100}{x + 10}$$

5. On considère la fonction f définie sur $[0; 10]$ par :
$$f(x) = \frac{x^2 + 100}{x + 10}$$

(a) Etudier les variations de la fonction f.

Pour tout $x \neq -10$ on a :

$$f'(x) = \frac{2x(x+10) - (x^2+100)}{(x+10)^2} = \frac{x^2+20x-100}{(x+10)^2}$$

ce nombre est du signe du numérateur, le dénominateur étant un carré ; ce qui revient à étudier le signe d'un trinôme :

$\Delta = 400 + 400 = 800$ donc le trinôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-20+\sqrt{800}}{2} = -10 + 10\sqrt{2} \qquad \text{ou} \qquad x_2 = \frac{-20-\sqrt{800}}{2} = -10 - 10\sqrt{2}$$

et donc sur l'intervalle $[0, 10]$ on a :

x	0		$-10+10\sqrt{2}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

(b) En déduire que la valeur minimum de EF est $20\sqrt{2} - 20$ et que dans ce cas, $DE = BF$.

Par lecture directe du tableau de variation f admet un minimum lorsque $x = -10 + 10\sqrt{2}$, ce minimum vaut

$$f\left(-10 + 10\sqrt{2}\right) = 20\sqrt{2} - 20$$

donc la valeur minimale de EF est bien $20\sqrt{2} - 20$ qui donc donnée pour $BF = -10 + 10\sqrt{2}$ et pour $DE = y = \dfrac{100-10x}{x+10} = 10\sqrt{2} - 10$.

On conclut donc que $DE = BF$.