Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECITON DE L'INTERROGATION N°19

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (5 points)

On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = x^3 - 9x - 12$$

1. Calculer $P'(x)$ pour tout réel x.
Pour tout réel x on a :
$$P'(x) = 3x^2 - 9$$

2. Etudier le signe de P' et en déduire le tableau de variation de P.
La dérivée est un trinôme du second degré, pour étudier son signe il faut déterminer ses racines qui sont :
$$P'(x) = 0 \iff 3x^2 - 9 = 0 \iff x^2 = 3 \iff x = -\sqrt{3} \qquad \text{ou} \qquad x = \sqrt{3}$$
On en déduit (du fait que la parabole d'équation $y = 3x^2 - 9$ admet un minium) que :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$P'(x)$		+	0	−	0	+	
$P(x)$		↗	$6\sqrt{3} - 12 \simeq -1,6$	↘	$-6\sqrt{3} - 12 \simeq -22,4$	↗	

En effet $P(-\sqrt{3}) = \left(-\sqrt{3}\right)^3 - 9 \times \left(-\sqrt{3}\right) - 12 = -3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 12 = 6\sqrt{3} - 12 \simeq -1,6$ et $P(\sqrt{3}) = \left(\sqrt{3}\right)^3 - 9\sqrt{3} - 12 = -6\sqrt{3} - 12 \simeq -22,4$.

3. Donner le maximum et le minimum de P sur l'intervalle $[-5;5]$.
L'image de -5 par P vaut :
$$P(-5) = -125 + 45 - 12 = -92$$
L'image de 5 par P vaut :
$$P(5) = 125 - 45 - 12 = 73$$
D'après le tableau de variation sur l'intervalle $\left[-5; -\sqrt{3}\right]$ on a :
$$-92 \leq P(x) \leq 6\sqrt{3} - 12$$
et sur l'intervalle $\left[\sqrt{3}; 5\right]$:
$$-6\sqrt{3} - 12 \leq P(x) \leq 73$$
et enfin sur l'intervalle $\left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right]$:
$$-6\sqrt{3} - 12 \leq P(x) \leq 6\sqrt{3} - 12$$
On peut conclure que le maximum sur $[-5;5]$ est atteint pour $x = 5$ et vaut 73, et le minimum est atteint pour $x = -5$ et vaut -92.

4. Par lecture du tableau de variation de la fonction P, en déduire le nombre de solution de l'équation $P(x) = 0$.
En donner une valeur approchée à l'aide de votre calculatrice, à 10^{-1} près.
Sur l'intervalle $\left]-\infty; \sqrt{3}\right]$ on constate que $P(x) < 0$ donc sur cet intervalle l'équation $P(x) = 0$ n'admet pas de solution, elle en admet une en revanche sur l'intervalle $\left[\sqrt{3}; +\infty\right[$ qui d'après mon ordinateur vaut $x \simeq 3,5$.

5. **Application** : Un cube a une arête de x cm. Un parallélépipède rectangle a pour dimensions : 1 cm ; 3 cm et $(3x + 4)$ cm. Trouver la valeur de x pour que ces 2 solides aient le même volume
Le volume du cube vaut :
$$x^3$$
celui du parallélépipède rectangle vaut :
$$3(3x + 4) = 9x + 12$$
On cherche à résoudre $x^3 = 9x + 12 \iff x^3 - 9x - 12 = 0 \iff P(x) = 0$, cet équation admet une unique solution $x \simeq 3,5$ d'après les questions précédentes.

Exercice 2. (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x - 2 + \frac{4}{x}$$

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x \neq 0$. On écrira la dérivée sous la forme d'un unique quotient.
   Pour tout $x \neq 0$ on a :
$$f'(x) = 1 + 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$$

2. Dresser le tableau de signe de f' puis de variation de f sur $\mathbb{R}^*$.
   Sur $\mathbb{R}^*$ $x^2 > 0$ par conséquent la dérivée est du signe du numérateur qui est un trinôme du second degré admettant deux racines évidentes -2 et 2, d'où :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$\nearrow$	-6	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

3. On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 2$. On se demande qui, de la droite $\mathscr{D}$ ou de la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ est au-dessus, et qui est en dessous.
   (a) Justifier que
$$f(x) - y = \frac{4}{x}$$
   Pour tout $x \neq 0$:
$$f(x) - y = x - 2 + \frac{4}{x} - (x-2) = \frac{4}{x}$$
   (b) Etablir le tableau de signe de l'expression $\frac{4}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$4/x$		$-$	$\|\|$	$+$	

   (c) Conclure.
   Sur l'intervalle $]-\infty;0[$ $f(x) - y < 0 \Longleftrightarrow f(x) < y$ et par conséquent $\mathscr{C}$ est en dessous de $\mathscr{C}_f$.
   Sur l'intervalle $]0;+\infty[$ $f(x) - y > 0 \Longleftrightarrow f(x) > y$ et par conséquent $\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{C}_f$.

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

Correction de l'interrogation n°19

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (5 points)

On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = x^3 - 6x - 8$$

1. Calculer $P'(x)$ pour tout réel x.
   Pour tout réel x on a :
   $$P'(x) = 3x^2 - 6$$

2. Etudier le signe de P' et en déduire le tableau de variation de P.
   La dérivée est un trinôme du second degré, pour étudier son signe il faut déterminer ses racines qui sont :
   $$P'(x) = 0 \iff 3x^2 - 6 = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = -\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{2}$$
   On en déduit (du fait que la parabole d'équation $y = 3x^2 - 9$ admet un minium) que :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$		↗	$4\sqrt{2}-8 \simeq -2,3$	↘	$-4\sqrt{2}-8 \simeq -13,7$	↗	

   En effet $P(-\sqrt{2}) = \left(-\sqrt{2}\right)^3 - 6 \times \left(-\sqrt{3}\right) - 8 = -2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 8 = 4\sqrt{2} - 8 \simeq -2,3$ et $P(\sqrt{2}) = \left(\sqrt{2}\right)^3 - 6\sqrt{2} - 8 = -4\sqrt{3} - 8 \simeq -13,7$.

3. Donner le maximum et le minimum de P sur l'intervalle $[-5;5]$.
   L'image de -5 par P vaut :
   $$P(-5) = -125 + 30 - 8 = -103$$
   L'image de 5 par P vaut :
   $$P(5) = 125 - 30 - 8 = 87$$
   D'après le tableau de variation sur l'intervalle $\left[-5;-\sqrt{2}\right]$ on a :
   $$-103 \leq P(x) \leq 4\sqrt{2} - 8$$
   et sur l'intervalle $\left[\sqrt{3};5\right]$:
   $$-4\sqrt{2} - 8 \leq P(x) \leq 87$$
   et enfin sur l'intervalle $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$:
   $$-4\sqrt{2} - 8 \leq P(x) \leq 4\sqrt{2} - 8$$
   On peut conclure que le maximum sur $[-5;5]$ est atteint pour $x = 5$ et vaut 87, et le minimum est atteint pour $x = -5$ et vaut -103.

4. Par lecture du tableau de variation de la fonction P, en déduire le nombre de solution de l'équation $P(x) = 0$.
   En donner une valeur approchée à l'aide de votre calculatrice, à 10^{-1} près.
   Sur l'intervalle $\left]-\infty;\sqrt{2}\right]$ on constate que $P(x) < 0$ donc sur cet intervalle l'équation $P(x) = 0$ n'admet pas de solution, elle en admet une en revanche sur l'intervalle $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ qui d'après mon ordinateur vaut $x \simeq 3$.

5. **Application** : Un cube a une arête de x cm. Un parallélépipède rectangle a pour dimensions : 1 cm ; 2 cm et $(3x+4)$ cm. Trouver la valeur de x pour que ces 2 solides aient le même volume
   Le volume du cube vaut :
   $$x^3$$
   celui du paralléllépipède rectangle vaut :
   $$2(3x+4) = 6x + 8$$
   On cherche à résoudre $x^3 = 6x + 8 \iff x^3 - 6x - 8 = 0 \iff P(x) = 0$, cet équation admet une unique solution $x \simeq 3$ d'après les questions précédentes.

<u>Exercice</u> 2. (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par :

$$f(x) = x - 2 + \frac{4}{x-1}$$

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x \neq 1$. On écrira la dérivée sous la forme d'un unique quotient.

   Pour tout $x \neq 1$ on a :

$$f'(x) = 1 + \frac{-4 \times 1}{(x-1)^2} = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 4}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

2. Dresser le tableau de signe de f' puis de variation de f sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

   Sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ $(x-1)^2 > 0$ par conséquent f' est du signe du trinôme $x^2 - 2x - 3$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 12 = 16 \Longrightarrow x_1 = \frac{2+4}{2} = 3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2-4}{2} = -1$$

   On obtient donc :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-5	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	3	$\nearrow$	

3. On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 2$. On se demande qui, de la droite $\mathscr{D}$ ou de la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ est au-dessus, et qui est en dessous.

   (a) Justifier que

$$f(x) - y = \frac{4}{x-1}$$

   Pour tout $x \neq 1$:

$$f(x) - y = x - 2 + \frac{4}{x-1} - (x-2) = \frac{4}{x-1}$$

   (b) Etablir le tableau de signe de l'expression $\frac{4}{x-1}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$4/(x-1)$		$-$	$\|\|$	$+$	

   (c) Conclure.

   Sur l'intervalle $]-\infty; 1[$ $f(x) - y < 0 \Longleftrightarrow f(x) < y$ et par conséquent $\mathscr{C}$ est en dessous de $\mathscr{C}_f$.

   Sur l'intervalle $]1; +\infty[$ $f(x) - y > 0 \Longleftrightarrow f(x) > y$ et par conséquent $\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{C}_f$.