Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°18

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1.

1. Dériver les fonctions définies ci-dessous :

   (a) $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 3x + 8$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
   $$f'(x) = 16x^3 - 6x + 3$$

   (b) $g(x) = (2x^3 + 3)(3x - 7)$
   g est écrite sous la forme d'un produit de deux fonctions u et v avec $u(x) = 2x^3 + 3 \Longrightarrow u'(x) = 6x^2$ et $v(x) = 3x - 7 \Longrightarrow v'(x) = 3$, par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
   $$g'(x)\text{« } = u'v + uv' \text{ »} = 6x^2(3x-7) + 3(2x^3+3) = 18x^3 - 42x^2 + 6x^3 + 9 = 24x^3 - 42x^2 + 9$$

   (c) $h(x) = \dfrac{2x^2+4}{3x-1}$ pour $x \neq \dfrac{1}{3}$
   h est écrite sous la forme d'un quotient de deux fonctions u et v avec $u(x) = 2x^2 + 4 \Longrightarrow u'(x) = 4x$ et $v(x) = 3x - 1 \Longrightarrow v'(x) = 3$, par conséquent pour tout $x \neq \dfrac{1}{3}$ on a :
   $$h'(x)\text{« } = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ »} = \frac{4x(3x-1) - 3(2x^2+4)}{(3x-1)^2} = \frac{12x^2 - 4x - 6x^2 - 12}{(3x-1)^2} = \frac{6x^2 - 4x - 12}{(3x-1)^2}$$

   (d) $k(x) = (-x^3 + 3x^2 + 1)^5$
   k est écrite sous la forme u^n avec $u(x) = -x^3 + 3x^2 + 1 \Longrightarrow u'(x) = -3x^2 + 6x$, par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
   $$k'(x)\text{« } = nu^{n-1}n' \text{ »} = 5(-3x^2+6x)(-x^3+3x^2+1)^4$$

2. On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_u$ de la fonction u au point d'abscisse 3
   L'équation de la tangente au point d'abscisse 3 est de la forme
   $$y = f'(3)(x-3) + f(3)$$
   Or,
   $$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$
   , par conséquent $f'(3) = -\dfrac{6}{100} = -\dfrac{3}{50}$. De plus $f(3) = \dfrac{1}{10}$, par conséquent :
   $$y = \frac{3}{50}(x-3) + \frac{1}{10} = \frac{3}{50}x - \frac{9}{50} + \frac{1}{10} = \frac{3}{50}x - \frac{4}{50}$$

Exercice 2. Dresser le tableau de variations des fonctions h et k de l'exercice précédent.

On sait que $h'(x) = \dfrac{6x^2-4x-12}{(3x-1)^2}$ pour tout $x \neq \dfrac{1}{3}$ ainsi le dénominateur de cette fraction est toujours strictement positif. Par conséquent $h'(x)$ a le même signe que $6x^2 - 4x - 12$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 16 + 4 \times 72 = 304$, le polynôme $6x^2 - 4x - 12$ a donc deux racines qui sont :
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-\sqrt{304}}{12} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{4+\sqrt{304}}{12}$$

On en déduit alors :

x	$-\infty$		x_1		$\frac{1}{3}$		x_2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$h(x_1)$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$h(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque : Les valeurs des limites dans le tableau de variation ne sont cette année pas exigées. En ce qui concerne la fonciton k, on sait que

$$k'(x) = 5(-3x^2 + 6x)(-x^3 + 3x^2 + 1)^4$$

Or, puisque la puissance est paire on a :

$$(-x^3 + 3x^2 + 1)^4 \geq 0$$

La dérivée est donc du signe du trinôme $5(-3x^2 + 6x)$ qui admet deux racines évidentes 0 et 2, d'où :
(A l'aide d'une calculatrice on remarque que $-x^3 + 3x^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow x \simeq 3.1$)

x	$-\infty$		0		2		$\simeq 3,1$		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$k(0)$	$\nearrow$	$k(2)$	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°18

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1.

1. Dériver les fonctions définies ci-dessous :

   (a) $f(x) = -4x^4 + 3x^2 - 3x - 8$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

   $$f'(x) = -16x^3 + 6x - 3$$

   (b) $g(x) = (2x^3 - 3)(3x + 7)$

   g est écrite sous la forme d'un produit de deux fonctions u et v avec $u(x) = 2x^3 - 3 \Longrightarrow u'(x) = 6x^2$ et $v(x) = 3x + 7 \Longrightarrow v'(x) = 3$, par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

   $$g'(x)\text{« } = u'v + uv' \text{ »} = 6x^2(3x+7) + 3(2x^3 - 3) = 18x^3 + 42x^2 + 6x^3 - 9 = 24x^3 + 42x^2 - 9$$

   (c) $h(x) = \frac{2x^2 - 4}{3x - 1}$ pour $x \neq \frac{1}{3}$

   h est écrite sous la forme d'un quotient de deux fonctions u et v avec $u(x) = 2x^2 - 4 \Longrightarrow u'(x) = 4x$ et $v(x) = 3x - 1 \Longrightarrow v'(x) = 3$, par conséquent pour tout $x \neq \frac{1}{3}$ on a :

   $$h'(x)\text{« } = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ »} = \frac{4x(3x-1) - 3(2x^2 - 4)}{(3x-1)^2} = \frac{12x^2 - 4x - 6x^2 + 12}{(3x-1)^2} = \frac{6x^2 - 4x + 12}{(3x-1)^2}$$

   (d) $k(x) = (x^3 - 3x^2 - 1)^5$

   k est écrite sous la forme u^n avec $u(x) = x^3 - 3x^2 - 1 \Longrightarrow u'(x) = 3x^2 - 6x$, par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

   $$k'(x)\text{« } = nu^{n-1}n' \text{ »} = 5(3x^2 - 6x)(x^3 - 3x^2 - 1)^4$$

2. On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_u$ de la fonction u au point d'abscisse 0

   L'équation de la tangente au point d'abscisse 3 est de la forme

   $$y = f'(3)(x - 3) + f(3)$$

   Or,

   $$f'(x) = -\frac{4x^3}{(x^4 + 1)^2}$$

   , par conséquent $f'(3) = -\frac{108}{82^2} = -\frac{27}{1681}$. De plus $f(3) = \frac{1}{82}$, par conséquent :

   $$y = -\frac{27}{1681}(x - 3) + \frac{1}{82}$$

Exercice 2. Dresser le tableau de variations des fonctions h et k de l'exercice précédent.

On sait que $h'(x) = \frac{6x^2 - 4x + 12}{(3x-1)^2}$ pour tout $x \neq \frac{1}{3}$ ainsi le dénominateur de cette fraction est toujours strictement positif. Par conséquent $h'(x)$ a le même signe que $6x^2 - 4x + 12$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 72 < 0$, le polynôme $6x^2 - 4x + 12$ n'a donc pas de racines et par conséquent :

$$6x^2 - 4x + 12 > 0 \Longleftrightarrow h'(x) > 0$$

On en déduit alors :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	‖	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Remarque : Les valeurs des limites dans le tableau de variation ne sont cette année pas exigées. En ce qui concerne la fonciton k, on sait que

$$k'(x) = 5(3x^2 - 6x)(x^3 - 3x^2 - 1)^4$$

Or, puisque la puissance est paire on a :

$$(x^3 - 3x^2 - 1)^4 \geq 0$$

La dérivée est donc du signe du trinôme $5(3x^2 - 6x)$ qui admet deux racines évidentes 0 et 2, d'où :
(A l'aide d'une calculatrice on remarque que $x^3 - 3x^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow x \simeq 3.1$)

x	$-\infty$		0		2		$\simeq 3,1$		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$k(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	$k(0)$	$\searrow$	$k(2)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$-\infty$