Correction de l'interrogation n°10

Exercice 1. (8 points)

1. Dresser le tableau de signe des trinômes suivants :

   (a) $2x^2-5x-4$
   $\Delta=b^2-4ac=25+32=57$, donc le trinôme admet deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5-\sqrt{57}}{4} \quad \text{ou} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5+\sqrt{57}}{4}$$

x	$-\infty$		$\frac{5-\sqrt{57}}{4}$		$\frac{5+\sqrt{57}}{4}$		$+\infty$
$2x^2-5x-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   (b) $-3x^2+7x-5$
   $\Delta=b^2-4ac=49-60=-11<0$, donc le trinôme n'admet pas de racines et conservent un signe constant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$-3x^2+7x-5$		$-$	

   (c) $x^2-10x+25$
   $\Delta=b^2-4ac=100-100=0$, donc le trinôme admet une unique racine :

$$x_3=\frac{-b}{2a}=\frac{10}{2}=5$$

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$x^2-10x+25$		$+$	0	$+$	

   (d) $4x^2+2x-1$
   $\Delta=b^2-4ac=4+16=20$, donc le trinôme admet deux racines :

$$x_4=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-\sqrt{20}}{8} \quad \text{ou} \quad x_5=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+\sqrt{20}}{8}$$

x	$-\infty$		$\frac{-2-\sqrt{20}}{8}$		$\frac{-2+\sqrt{20}}{8}$		$+\infty$
$4x^2+2x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Pour chacun des trinômes précédents donner, si possible, une factorisation. $2x^2-5x-4=2(x-x_1)(x-x_2)$, voir x_1 et x_2 plus haut.
   $-3x^2+7x-5$ n'admet pas de factorisation.
   $x^2-10x+25=(x-5)^2$.
   $4x^2+2x-1=4(x-x_4)(x-x_5)$, voir x_4 et x_5 plus haut.

3. En vous servant des tableaux de signes de la première question, donner l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ des équations et inéquations suivantes :

   (a) $2x^2-5x-4=0$.

$$\mathscr{S}=\{x_1;x_2\}$$

   (b) $-3x^2+7x-5\geq 0$

$$\mathscr{S}=\emptyset$$

   (c) $x^2-10x+25<0$

$$\mathscr{S}=\emptyset$$

   (d) $4x^2+2x-1\leq 0$

$$\mathscr{S}=[x_4;x_5]$$

Exercice 2. (2 points)

Deux entiers relatifs consécutifs ont la somme de leurs carrés qui vaut 5725. Déterminer ces entiers.

Notons n le plus petit des deux entiers alors :

$$n^2+(n+1)^2=5725 \iff n^2+n^2+2n+1=5725 \iff 2n^2+2n-5724=0 \iff n^2+n-2862=0$$

$\Delta=1+4\times 2862=11449=107^2$, il y a donc deux solutions :

$$n_1=\frac{-1-107}{2}=-54 \qquad \text{et} \qquad n_2=\frac{-1+107}{2}=53$$

Si $n=-54$ alors les deux entiers solutions sont -54 et -53, par contre si $n=53$ alors les deux entiers solutions sont 53 et 54.

Exercice 1. (8 points)

1. Dresser le tableau de signe des trinômes suivants :
   (a) $-2x^2+5x+4$
   $\Delta = b^2-4ac = 49+60 = 57$, donc le trinôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-\sqrt{57}}{-4} = \frac{5+\sqrt{57}}{4} \qquad \text{ou} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-\sqrt{57}}{4}$$

x	$-\infty$		$\frac{5-\sqrt{57}}{4}$		$\frac{5+\sqrt{57}}{4}$		$+\infty$
$-2x^2+5x+4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   (b) $3x^2-7x+5$
   $\Delta = b^2-4ac = 49-60 = -11 < 0$, donc le trinôme n'admet pas de racines et conservent un signe constant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$3x^2-7x+5$		$+$	

   (c) $4x^2+4x+1$
   $\Delta = b^2-4ac = 16-16 = 0$, donc le trinôme admet une unique racine :

$$x_3 = \frac{-b}{2a} = -\frac{4}{8} = -0,5$$

x	$-\infty$		$-0,5$		$+\infty$
$4x^2+4x+1$		$+$	0	$+$	

   (d) x^2-x-1
   $\Delta = b^2-4ac = 1+4 = 5$, donc le trinôme admet deux racines :

$$x_4 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{ou} \qquad x_5 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2-x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Pour chacun des trinômes précédents donner, si possible, une factorisation.
   $-2x^2+5x+4 = -2(x-x_1)(x-x_2)$, voir x_1 et x_2 plus haut.
   $3x^2-7x+5$ n'admet pas de factorisation.
   $4x^2+4x+1 = (2x+1)^2$.
   $x^2-x-1 = (x-x_4)(x-x_5)$, voir x_4 et x_5 plus haut.
3. En vous servant des tableaux de signes de la première question, donner l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ des équations et inéquations suivantes :
   (a) $-2x^2+5x+4 = 0$

$$\mathscr{S} = \{x_2 ; x_1\}$$

   (b) $3x^2-7x+5 \geq 0$

$$\mathscr{S} = \mathbb{R}$$

   (c) $4x^2+4x+1 < 0$

$$\mathscr{S} = \emptyset$$

   (d) $x^2-x-1 \leq 0$

$$\mathscr{S} = [x_4 ; x_5]$$

Exercice 2. (2 points)

Déterminer trois entiers relatifs consécutifs dont la somme des carrés vaut 2030.

Notons n le plus petit des trois entiers alors :

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=2030 \iff n^2+n^2+2n+1+n^2+4n+4=2030 \iff 3n^2+6n-2025=0 \iff n^2+2n-675=0$$

$\Delta=4+4\times 675=2704=52^2$, il y a donc deux solutions :

$$n_1=\frac{-2-52}{2}=-27 \qquad \text{et} \qquad n_2=\frac{-2+52}{2}=25$$

Si $n=-27$ alors les trois entiers solutions sont -27 et -26 et -25, par contre si $n=25$ alors les trois entiers solutions sont 25 et 26 et 27.