Correction du devoir devoir commun 2

Exercice 1 : 6 points

1. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme et

$$f'(x) = 6x^2 - 120x + 450$$

Étudions le signe de $f'(x)$ afin d'établir le tableau de signe de $f'(x)$ puis le tableau de variations de f :
$\Delta = (-120)^2 - 4 \times 6 \times 450 = 3600 > 0$ donc $f'(x)$ admet deux racines : $x_1 = 5$ et $x_2 = 15$

x	0		5		15		20
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1000	$\searrow$	0	$\nearrow$	1000

(b) Equation de la tangente au point d'abscisse 0 :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = 450x$$

(c) Il suffit de résoudre

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 60x^2 + 450x = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 - 60x + 450) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2x^2 - 60x + 450 = 0$$

Pour $2x^2 - 60x + 450 = 0$: $\Delta = 0$ et donc ce trinôme n'a qu'une racine : $x = \dfrac{-b}{2a} = 15$
Ainsi $\mathscr{C}_f$ a deux points d'intersection avec l'axe des abscisses :

$$O(0;0) \text{ et } A(15;0)$$

2. (a) On sait que

$$2y + 2x = 30 \Leftrightarrow y + x = 15 \Leftrightarrow y = 15 - x$$

La hauteur correspond à la largeur de la feuille privée des bandes découpées donc

$$\text{hauteur} = 30 - 2x$$

(b) Par définition du volume d'un parallélépipède rectangle :

$$V(x) = \text{base}\times\text{hauteur} = x\times y\times\text{hauteur} = x(15-x)(30-2x) = (15x-x^2)(30-2x) = -2x^3-60x^2+450x$$

(c) Par lecture du tableau de variations de la question 1., le volume de la boite est maximal pour $x = 5$ et le volume vaut alors $1000cm^3 = 1l$.

Exercice 2 :

1. (a) $u_0 = 1$ donc $v_0 = -5$
   $u_1 = \frac{1}{3} \times 1 + 4 = \frac{13}{3}$ donc $v_1 = \frac{13}{3} - 6 = \frac{-5}{3}$
   $u_2 = \frac{1}{3} \times \frac{13}{3} + 4 = \frac{13}{9} + \frac{36}{9} = \frac{49}{9}$ donc $v_0 = \frac{49}{9} - 6 = \frac{49}{9} - \frac{54}{9} = \frac{-5}{9}$
   La suite (v_n) semble géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

   (b)
   $$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}u_n + 4 - 6 = \frac{1}{3}u_n - 2 = \frac{1}{3}(u_n - 6) = \frac{1}{3}v_n$$

   (c) D'après les deux questions précédentes, la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -5$ ainsi :
   $$v_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

   (d) Comme $v_n = u_n - 6$, on sait que $u_n = v_n + 6$ et donc d'après la question précédente :
   $$u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$$

   (e) Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$

2. La suite (v_n) étant géométrique de raison $\frac{1}{3}$:
   $$S = v_0\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q} = -5\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} = -5\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{\frac{2}{3}} = \frac{-15}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{11}\right) = \frac{-442865}{59049} \simeq -7,5$$

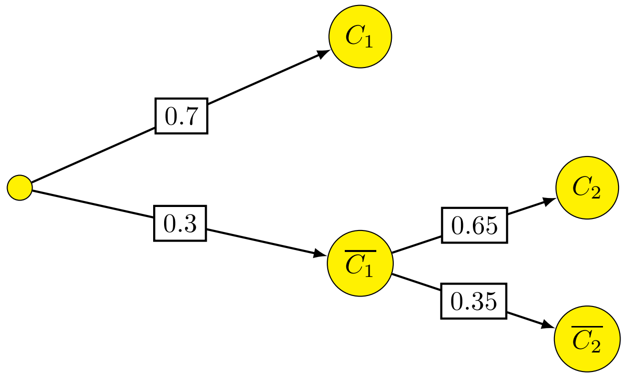
3. (a) Cet algorithme permet de calculer la somme $v_0 + v_1 + \cdots + v_n$
   (b) Il suffit de remplacer :
   - $S := -5$ par $S := 1$
   - $S := S - 5\left(\frac{1}{3}\right)^i$ par $S := S - 5\left(\frac{1}{3}\right)^i + 6$

4. (a) D'après la définition $nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1$, il suffit de remplacer n par 6, on obtient
   $$6w_6 = (6+1)w_{6-1} + 1 \Leftrightarrow 6w_6 = 7w_5 + 1 \Leftrightarrow 6w_6 = 7 \times 11 + 1 \Leftrightarrow 6w_6 = 78 \Leftrightarrow w_6 = \frac{78}{6} = 13$$

   (b) La suite (w_n) est arithmétique de raison 2 et de premier terme $w_0 = 1$.Ainsi
   $$w_9 = w_0 + 2009 \times 2 = 1 + 2009 \times 2 = 4019$$

Exercice 3 :

1. On choisit un écran au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication.



   (a)

   (b) $p(C_1) = 0.7$ et $p(C_2) = p(\overline{C_1} \cap C_2) = 0.3 \times 0.65 = 0.195$.

   (c) La probabilité que l'écran plasma soit détruit correspond à $p(\overline{C_1} \cap \overline{C_2}) = 0.3 \times 0.35 = 0,105$.

2. (a) tableau

valeurs x_i prises par X :	$a-1000$	$a-1050$	-1050	Total
$p(X = x_i)$:	0.7	0.195	0.105	1

   $p(X = a - 1000) = p(C_1) = 0.7$: si le premier test est positif, l'écran ne coute que 1000 euros en rapporte a.
   $p(X = a - 1050) = p(C_2) = 0.195$: si le premier test est négatif et le deuxième test positif, l'écran coute 1050 euros en rapporte a
   $p(X = -1500) = p(\overline{C}_2) = 0.105$: si le premier test et le deuxième test sont négatifs, l'écran coute 1050 euros et ne rapporte rien

   (b)

$$E(X) = (0.7)(a-1000)+0.195(a-1050)+0.105\times 1050 = 0.7a-700+0.195a-204.75-110.25 = 0,895a-1015$$

   (c) L'entreprise peut espérer réaliser des bénéfices pour

$$E(X) > 0 \Leftrightarrow 0,895a - 1015 > 0 \Leftrightarrow a > \frac{1015}{0.895}$$

   A partir de $a = 1134.08$ euros, l'entreprise peut espérer des bénéfices.

3. (a) – On répète 7 **fois** la même expérience « tester un écran plasma »dans des conditions identiques.
   – Chaque test d'écran (expérience) n'a que deux issues :
     – S :« l'écran finit à la déchetterie »$p(S) = 0.105$
     – $\overline{S}$:« l'écran est acheminé chez le client »$p(\overline{S}) = 0.895$
   – Les expériences sont indépendantes
   La variable aléatoire Y qui compte le nombre d'écran qui finissent à la déchetterie suit une loi binomiale de paramètres 7 et 0.105.

   (b) $p(Y = 3) = \binom{7}{3} \times 0.105^3 \times 0.895^4 \simeq 0.026$.

   (c) Au moins un écran plasma est sauvé de la déchetterie correspond à $Y \leq 6$

$$p(Y \leq 6) = 1 - p(X = 7) = 1 - \binom{7}{7} \times 0.105^7 \times 0.895^0 = 1 - 0.105^7 \simeq 1$$

   (d) $E(Y) = n \times p = 7 \times 0.105 \simeq 0.735$.
   En moyenne 0.735 écrans sur 7 sont détruits.

Exercice 4 :

(6 points)

On considère un repère orthonormé dans lequel :

$$A(0;0) \qquad B(1,0) \qquad C(1;1) \qquad D(0;1) \qquad E\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

1. Réaliser une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.
2. (a) Rappeler les valeurs de $\cos\frac{\pi}{3}$ et $\sin\frac{\pi}{3}$. Que constate-t-on ?

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On constate qu'il s'agit des coordonnées du point E, ce qui signifie qu'il est sur le cercle trigonométrique.

(b) Calculer les longueurs AE et AB. En déduire que les points B et E appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ dont on donnera le centre et le rayon.

$\overline{AE}\left(0,5;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ donc $AE=1$ (E est sur le cercle trigonométrique.) De plus $\overrightarrow{AB}(1;0)$ donc $AB=1$. Les points B et E sont sur le cercle de centre A et de rayon 1.

(c) Donner, en justifiant, la nature du triangle AEB.

$AE=AB$ donc AEB est isocèle, de plus $E\left(\cos\frac{\pi}{3};\sin\frac{\pi}{3}\right)$ donc le triangle AEB possède un angle qui mesure $\frac{\pi}{3}$ rad, on en déduit que AEB est équilatéral.

3. On donne les points $F\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $G\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

(a) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{DE}$.

$$\overrightarrow{BG}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}-1;\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\Longleftrightarrow\overrightarrow{BG}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

En ce qui concerne $\overrightarrow{DE}$ on trouve :

$$\overrightarrow{DE}\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)$$

(b) Calculer $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BG}$. Que peut-on en déduire ?

$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\times\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}-2}{2}=0$$

Ainsi $(DE)\perp(BG)$.

(c) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DF}$.

$$\overrightarrow{DF}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$$

(d) En déduire que les points D, E et F sont alignés.

On vérifie si les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}-2}{2}-\left[-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right]=0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires, il suit que les points D, E et F sont alignés.

Exercice 5 :

1. (a) $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{CE} = -IA\times CE$ car les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires et de sens contraires
$= -2\times 2 = 4$ car $IA = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{4}{2}$ et $CE = CB = DA = 2$
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = AD\times BC$ car les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires de même sens
$= 2\times 2 = 4$

(b) $\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}\right) = \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CE}$
$= 0-4+4+0$ car $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux ainsi que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CE}$
$= 0$

Les droites (ID) et (BE) sont donc perpendiculaires.

(c) $\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$ car A est le projeté orthogonal de D sur (IB)
$= -IA\times IB = -4$

(d) $\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{ID}\cdot\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BE}\right) = \overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{BE} = -4+0 = -4$

(e) D'après la théorème de Pythagore dans le triangle ADI en A :

$$AD^2 + AI^2 = DI^2 \Leftrightarrow DI^2 = 2^2+2^2 = 8 \Leftrightarrow DI = \sqrt{8}$$

ainsi en calculant d'une autre façon $\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IE}$ en en utilisant la question précédentes :

$$\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IE} = ID\times IE\ cos\widehat{DIE} \Leftrightarrow -4 = \sqrt{8}\times 2\sqrt{5}\ cos\widehat{DIE} \Leftrightarrow\ cos\widehat{DIE} = \frac{-2}{\sqrt{8}\times\sqrt{5}} \simeq 108°$$

2. On se place désormais dans le repère $\left(A; \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)$.

(a) Ce repère est orthonormé car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux et $\|\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\| = \|\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\| = 1$

(b) Equation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $I(2;0)$ et de rayon $ID = \sqrt{8}$ donc

$$(x-2)^2 + y^2 = 8$$

(c) $(x-2)^2 + y^2 = (1-2)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2 = 1+7 = 8$ donc $F(1;\sqrt{7}) \in \mathscr{C}$.

(d) Tangente au cercle $\mathscr{C}$ passant par F :
– un point $F(1;\sqrt{7})$
– un vecteur normal : $\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{7}\end{pmatrix}$

donc $-x+\sqrt{7}y+c = 0$ En utilisant F : $-(1)+\sqrt{7}\times\sqrt{7}+c = 0 \Leftrightarrow c = -6$ Donc

$$-x+\sqrt{7}y-6 = 0$$