Correction du devoir 7

Exercice 1. (10 points)

On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = x^3 - 9x - 12$$

1. Calculer $P'(x)$ pour tout réel x.
   $P'(x) = 3x^2 - 9$
2. Etudier le signe de P' et en déduire le tableau de variation complet de P.
   $3x^2 - 9 = 0 \iff x^2 = 3 \iff x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$ d'où :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	↗	$6\sqrt{3}-12$	↘	$-6\sqrt{3}-12$	↗	$+\infty$

3. Donner le maximum et le minimum de P sur l'intervalle $[-2; 2]$.
   Le tableau de variation complet de P sur $[-2; 2]$ est :

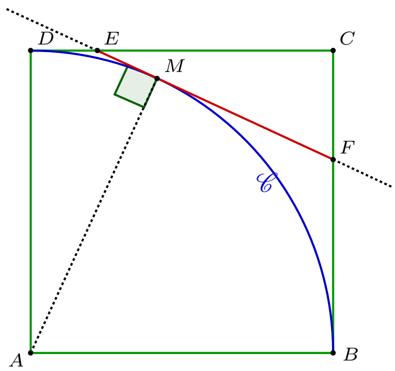
x	-2		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+2$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	-2	↗	$6\sqrt{3}-12$	↘	$-6\sqrt{3}-12$	↗	-22

   On lit le minimum m sur ce tablau : $-6\sqrt{3} - 12$ et le maximum M : $M = 6\sqrt{3} - 12$
4. Par lecture du tableau de variation de la fonction P, en déduire le nombre de solution de l'équation $P(x) = 0$.
   En donner une valeur approchée à l'aide de votre calculatrice, à 10^{-1} près.
   P étant négative sur l'intervalle $]-\infty; \sqrt{3}]$, l'équation $P(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle et P étant strictement croissante sur $[\sqrt{3}; +\infty[$ avec $P(100) > 0$, l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α dans cet intervalle qui vaut à 10^{-1} près :
   $$\alpha \simeq 3,5$$
5. **Application** : Un cube a une arête de x cm. Un parallélépipède rectangle a pour dimensions : 1 cm ; 3 cm et $(3x+4)$ cm. Trouver la valeur de x pour que ces 2 solides aient le même volume
   Le volume $V(x)$ de ce parallélépipède rectangle vaut :
   $$V(x) = 3(3x + 4) = 9x + 12$$
   celui du cube $V_c(x)$ vaut :
   $$V_c(x) = x^3$$
   Ainsi on doit résoudre
   $$V_c(x) = V(x) \iff x^3 = 9x + 12 \iff P(x) = 0$$
   La solution de cette équation est donnée par la question précédente :
   $$x = \alpha \simeq 3,5$$

Exercice 2. (10 points)

$ABCD$ est un carré de côté 10. $\mathscr{C}$ est le quart de cercle de centre A et de rayon AB contenu dans le carré $ABCD$. M est un point quelconque de $\mathscr{C}$. La tangente à $\mathscr{C}$ en M coupe les segments $[BC]$ et $[CD]$ en E et en F.

On se propose de trouver la position du point M sur $\mathscr{C}$ pour que la longueur EF soit minimale.



On pose $BF = x$ et $DE = y$. Le réel x appartient à l'intervalle $[0; 10]$.

1. En comparant successivement dans les triangles AMF et ABF justifier que $MF = x$. Procéder de même pour justifier que $ME = y$. En déduire que
$$EF = x + y$$

   AM et AB sont deux rayons d'un même cercle donc $AM = AB$, de plus les triangles AMF et ABF sont tous deux rectangles et possèdent la même hypoténuse. Leur troisième côté est donc de mesure identique, i.e :
$$MF = BF = x$$
   On procède de la même manière dans les triangles ABE et ADE pour montrer que $ME = y$.
   Par conséquent :
$$EF = EM + MF = y + x = x + y$$

2. En considérant le triangle CEF, démontrer que :
$$EF^2 = x^2 + y^2 - 20x - 20y + 200$$
   puis, en utilisant le fait que $EF = x + y$, que
$$y(2x + 20) = -20x + 200$$

   Le triangle CEF est rectangle, Pythagore donne :
$$EF^2 = CE^2 + CF^2 \iff (x+y)^2 = (10-x)^2 + (10-y)^2 \iff EF^2 = x^2 + y^2 - 20x - 20y + 200$$
   et comme $EF = x + y$ on a :
$$(x+y)^2 = x^2+y^2-20x-20y+200 \iff x^2+2xy+y^2 = x^2+y^2-20x-20y+200 \iff 2xy+20y = -20x+200$$
   d'où :
$$y(2x + 20) = -20x + 200$$

3. En déduire que $y = \dfrac{100 - 10x}{x + 10}$

   Comme $y(2x + 20) = -20x + 200 \iff y = \dfrac{-20x + 20}{2x + 20} = \dfrac{100 - 10x}{x + 10}$

4. En déduire enfin que que $EF = x + y = \dfrac{x^2 + 100}{x + 10}$.
$$EF = x + y = x + \frac{100 - 10x}{x + 10} = \frac{x^2 - 10x + 100 - 10x}{x + 10} = \frac{x^2 + 100}{x + 10}$$

5. On considère la fonction f définie sur $[0;10]$ par :

$$f(x)=\frac{x^2+100}{x+10}$$

(a) Etudier les variations de la fonction f.

Pour tout $x\neq -10$ on a :

$$f'(x)=\frac{2x(x+10)-(x^2+100)}{(x+10)^2}=\frac{x^2+20x-100}{(x+10)^2}$$

ce nombre est du signe du numérateur, le dénominateur étant un carré ; ce qui revient à étudier le signe d'un trinôme :

$\Delta=400+400=800$ donc le trinôme admet deux racines :

$$x_1=\frac{-20+\sqrt{800}}{2}=-10+10\sqrt{2} \qquad \text{ou} \qquad x_2=\frac{-20-\sqrt{800}}{2}=-10-10\sqrt{2}$$

et donc sur l'intervalle $[0,10]$ on a :

x	0		$-10+10\sqrt{2}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

(b) En déduire que la valeur minimum de EF est $20\sqrt{2}-20$ et que dans ce cas, $DE=BF$.

Par lecture directe du tableau de variation f admet un minimum lorsque $x=-10+10\sqrt{2}$, ce minimum vaut

$$f\left(-10+10\sqrt{2}\right)=20\sqrt{2}-20$$

donc la valeur minimale de EF est bien $20\sqrt{2}-20$ qui donc donnée pour $BF=-10+10\sqrt{2}$ et pour $DE=y=\dfrac{100-10x}{x+10}=10\sqrt{2}-10$.

On conclut donc que $DE=BF$.