# Correction du devoir Surveillé 6

**Exercice 1.** (3 points)

On sait qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p > \frac{1}{2}$. On sait aussi que :

$$V(X) = 2$$

1. Rappeler la formule donnant l'espérance et la variance d'un loi binomiale.

$$E(X) = np \qquad \text{et} \qquad V(X) = np(1-p)$$

2. Déterminer la valeur de $p$. On a

$$V(X) = 2 \iff 10p(1-p) = 2 \iff 10p - 10p^2 - 2 = 0 \iff -5p^2 + 5p - 1 = 0$$

On est amené à chercher les racines d'un trinôme du second degré. $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 20 = 5$, par conséquent cette équation admet deux solutions :

$$p_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-\sqrt{5}}{-10} = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \qquad \text{et} \qquad p_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+\sqrt{5}}{-10} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

Seul $p_1 > \frac{1}{2}$, par conséquent :

$$p = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$$

3. En déduire E(X).
On en déduit que :

$$E(X) = np = 10 \times \frac{5+\sqrt{5}}{10} = 5 + \sqrt{5}$$

**Exercice 2.** (8 points)

Un homme se présente dans un village Syldave et se déclare devin. Les habitants sceptiques le soumettent à une série de test, il se trouve que dans 8 cas sur 10 notre homme devine la bonne réponse.
On lance 15 fois de suite une pièce de monnaie Syldave bien équilibrée, on admet que l'homme « devin » a 8 chance sur 10 de prévoir le bon résultat. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de bons résultats donné par l'homme « devin ».

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X ; en donner ses paramètres. *Justifier.*
On repète 15 fois la même épreuve de Bernoulli (à savoir demander au devin de prévoir sur quelle face tombe la pièce de monnaie Syldave). X compte le nombre de succès lors de ces 15 épreuves, la probabilité de succès étant $\frac{8}{10}$, par conséquent :

$$X \hookrightarrow B\left(15; \frac{8}{10}\right)$$

2. Calculer la probabilité pour que l'homme « devin » ne donne aucune bonne réponse.

$$p(X=0) = \left(\frac{2}{10}\right)^{15}$$

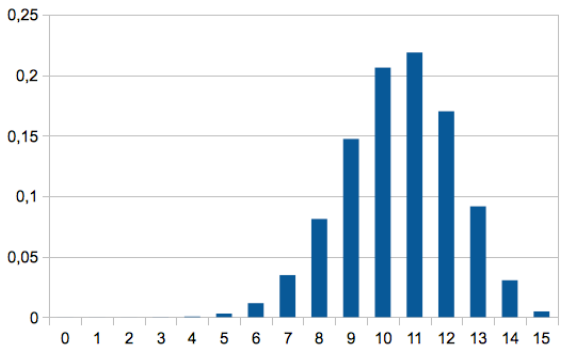
3. Calculer la probabilité pour que l'homme « devin » donne exactement 8 bonnes réponses. Comme $X \hookrightarrow B\left(15; \frac{8}{10}\right)$ on a :

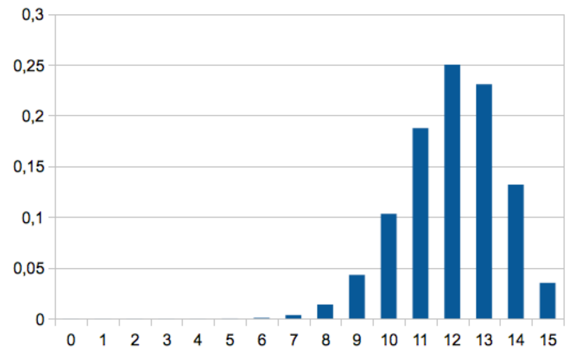
$$p(X=8) = \binom{15}{8} 0,8^8 \times 0,2^7$$

4. Calculer la probabilité pour que l'homme « devin » donne au moins une bonne réponse.

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X=0) = 1 - \left(\frac{2}{10}\right)^{15}$$

5. Finalement, l'homme « devin » donne 11 bonnes réponses, peut-il être satisfait de lui-même ?
L'homme devin peut espérer répondre à :
$$\mathrm{E(X)} = np = 15 \times \frac{8}{10} = 12$$
réponses, il peut légitimement être deçu de son résultat.
6. Parmi les deux diagrammes en barre suivant, lequel peut représenter la loi de probabilité de X ? *Justifier.*




Puisque $\mathrm{E(X)} = 12$, $(\mathrm{X} = 12)$ est l'éventualité la plus probable, il vient que le diagramme 2 est le seul possible.
7. Avant chaque réponse de l'homme « devin », le lanceur (de la pièce de monnaie) paie 3 pièces Syldave en cas de bonne réponse de l'homme « devin », et en cas de mauvaise réponse l'homme « devin » paie 2 pièce Syldave.
   (a) Combien l'homme « devin »peut-il espérer gagner d'argent lors d'une série de 100 lancers ? *Justifier.*
   Notons $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathrm{B}\left(100; \frac{8}{10}\right)$, on a $\mathrm{E(Y)} = 100 \times \frac{8}{10} = 80$, ainsi l'homme devin peut espérer répondre 80 fois correctement ce qui se traduit en terme de gain (que nous noterons G) par :
   $$\mathrm{G} = 80 \times 3 - 20 \times 2 = 200$$
   (b) Les hommes « devin » Syldave voit leur probabilité divinatoire baisser en vieillissant. A partir de quelle probabilité de réussite ce « métier » lui permet-il de gagner plus de 150 pièces Syldave en 100 lancers ? En notant G le gain on a :
   $$\mathrm{G} \geq 150 \Longleftrightarrow 100p \times 3 - 100(1-p) \times 2 \geq 150 \Longleftrightarrow 300p - 200 + 200p \geq 150 \Longleftrightarrow 500p \geq 350 \Longleftrightarrow p \geq \frac{350}{500} = \frac{35}{50} = \frac{7}{10}$$

**Exercice 3.** (8 points)

Une compagnie de transports désire optimiser les contrôles afin de limite l'impact des fraudes. Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les 20 jours ouvrables d'un mois, soit au total 40 trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à $p$.
Un trajet côute 10€. En cas de fraude, l'amende est de 100€.
Théo fraude systématiquement lors des 40 trajets étudiés (ce n'est pas bien du tout !).
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de trajets où Théo a été contrôlé.

1. Quelle loi suit X. Justifier.
On repète 40 fois la même épreuve de Bernoulli (à savoir être controlé ou non). X compte le nombre de succès lors de ces 40 épreuves, la probabilité de succès étant $p$, on a :
$$\mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{B}(40; p)$$
2. On suppose que $p = 0.05$.
   (a) Calculer à $10^{-4}$ près $\mathrm{P(X = 5)}$. Interpréter.
   Puisque X suit une loi binomiale :
   $$p(\mathrm{X} = 5) = \binom{40}{5} \times 0,05^5 \times 0,95^{40} \simeq 0,0342$$

Dans un peu plus de 3% des cas, Théo subira exactement 5 contrôles sur les 40 trajets qu'il va effectuer.

(b) Calculer à $10^{-4}$ près la probabilité que Théo soit contrôlé au moins une fois.

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,95^{40} \simeq 0,8715$$

(c) Calculer à $10^{-4}$ près la probabilité que Théo soit contrôlé au plus deux fois.

$$p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = 0,95^{40} + 40 \times 0,05 \times 0,95^{39} + \binom{40}{2} \times 0,05^2 \times 0,95^{38} \simeq 0,6767$$

3. Soit Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique réalisé par le fraudeur.

   (a) Justifier que $Z = 400 - 110X$.
   Les 40 fraudes rapportent à Théo $40 \times 10 = 400$ euros, et les X contrôles coûtent à Théo $(100 + 10) \times X$, par conséquent :
   $$Z = 400 - 110X$$

   (b) Calculer $E(Z)$.
   $$E(Z) = E(400 - 110X) = 400 - 110E(X) = 400 - 110 \times 40 \times 0,05 = 400 - 4400 \times 0,05 = 180$$

4. (a) La fraude est-elle favorable ou non pour Théo ?
   D'un point de vue financier, l'espérance de gain de Théo étant égale à 180€, la fraude lui est favorable. Après au regard de la morale de Théo, que nous ne connaissons pas, il est difficile de se prononcer.

   (b) Pour quelles valeurs de $p$ en serait-il autrement ?
   Semble-t-il dans cet exercice notre raisonnement ne sera que financier, ne prenons pas en compte la personnalité de Théo, et considérons que la fraude est défavorable à Théo si et seulement si $E(Z) < 0$, ainsi :
   $$E(Z) < 0 \iff 400 - 4400p < 0 \iff -4400p < -400 \iff p > \frac{400}{4400} = \frac{1}{11}$$

**Exercice 4.** (8 points)

Le druide de Gattaca a besoin pour préparer sa potion magique de champignons syldave. Il envoie 11 vaillants citoyens les chercher. Parsemé de périls et d'embuche on estime qu'un citoyen (aussi vaillant soit-il) a 2 chances sur 17 de périr pour aller dans la forêt et tout autant pour revenir à Gattaca.

1. Calculer la probabilité qu'un citoyen revienne vivant de l'excursion. *on pourra s'aider d'un arbre de probabilité.*
   L'arbre de probabilité étant fatiguant à construire nous nous contenterons de la réponse, cette probabilité, qui est par ailleurs donné dans la question qui suit, vaut :
   $$\frac{15}{17} \times \frac{15}{17} = \frac{225}{289}$$

2. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de survivant.

   (a) Expliquer pourquoi $X \hookrightarrow B\left(11; \frac{225}{289}\right)$
   On repète 11 fois la même épreuve de Bernoulli consistant à survivre à un aller-retour en forêt ou non avec une probabilité de $\frac{225}{289}$, X comptant le nombre de survivant, il est clair que $X \hookrightarrow B\left(11; \frac{225}{289}\right)$

   (b) Calculer la probabilité qu'au moins un citoyen ramène des champignons syldave nécessaire à la préparation de la potion magique.
   $$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{64}{289}\right)^{11} \simeq 1$$
   Il est presque certains que le druide pourra préparer un petit peu de potion magique, nécessaire pour combattre l'invasion bordure.

   (c) Calculer $p(X = 0)$ et $p(X = 1)$.
   $$p(X = 0) = \left(\frac{64}{289}\right)^{11} \simeq 0 \qquad \text{et} \qquad p(X = 1) = 11 \times \frac{225}{289} \times \left(\frac{64}{289}\right)^{10} \simeq 0$$

(d) En déduire la probabilité qu'au moins deux citoyens ramène des champignons syldave.

$$p(\mathrm{X} \geq 2) = 1 - p(\mathrm{X}=0) - p(\mathrm{X}=1) = 1 - \left(\frac{64}{289}\right)^{11} - 11 \times \frac{225}{289} \times \left(\frac{64}{289}\right)^{10}$$

(e) Calculer E(X). Interpréter.

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = np = 11 \times \frac{225}{289} \simeq 9$$

Environ 9 citoyens reviendront de leur ballade en forêt avec des champignons.

3. Lance, un jeune cycliste Syldave, n'a pas la permission de consommer les champignons préparé par le druide, il décide donc de se débrouiller tout seul. Pendant une semaine tous les matins, Lance part chercher les fameux champignons et revient le soir afin de les préparer et de les manger.
On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de jours où Lance a pu manger des champignons syldave.

(a) Donner $p(\mathrm{Y}=1)$ et $p(\mathrm{Y}=2)$.
Il s'agit de comprendre qu'ici on ne répète pas toujours la même épreuve de Bernoulli, par conséquent Y ne suit pas une loi binomiale, il faut raisonner autrement (à l'aide d'un arbre de probabilité qu'on imaginera). $(\mathrm{Y}=1)$ signifie que Lance a réussit à manger des champignons une seule fois, donc il est mort le deuxième jour, par conséquent :

$$p(\mathrm{Y}=1) = \frac{225}{289} \times \frac{64}{289}$$

$$p(\mathrm{Y}=2) = \frac{225}{289} \times \frac{225}{289} \times \frac{64}{289}$$

(b) Recopier et compléter le tableau suivant :

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(\mathrm{Y}=k)$ | | | | | | | | |

On laisse le soin au lecteur de compléter tout seul ce tableau, en s'inspirant de la question 1.

**Exercice 5.** (3 points)

Un basketteur effectue une série de 7 lancers francs. Il réussit chacun des lancers francs avec une probabilité égale à $p$.
Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la plus petite valeur de $p$, à 10−2 près, telle qu'on soit sûr à plus de 99% que le basketteur réussisse au moins un des sept lancers francs.

Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers francs réussit par leur basketteur, pour les mêmes raisons que dans les autres questions de ce devoir $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{B}(7;p)$ On cherche $p$ tel que :

$$p(\mathrm{X} \geq 1) \geq 0,99 \iff 1 - p(\mathrm{X}=0) \geq 0,99 \iff -(1-p)^7 \geq -0,01 \iff (1-p)^7 \leq 0,01$$

La suite s'obtient en utilisant sa calculatrice, par tatonnement, elle donne $p \simeq 0,49$. Le lecteur observa cependant cette démonstration, utilisant les logarithmes, qui sera explicitée en classe de terminale :

$$(1-p)^7 \leq 0,01 \iff log[(1-p)^7] \leq log 0,01 \iff 7log(1-p) \leq -2 \iff log(1-p) \leq \frac{-2}{7} \iff 1-p \leq 10^{-\frac{2}{7}}$$

La suite est alors de nouveau accessible pour un élève de première, s'il fait abstraction du sens à donner au nombre $10^{-\frac{2}{7}}$ :

$$1-p \leq 10^{-\frac{2}{7}} \iff -p \leq 10^{-\frac{2}{7}} - 1 \iff p \geq 1 - 10^{-\frac{2}{7}}$$

**Exercice 6.** **Question Cactus**

Le capitaine des pompiers de New-York réside à l'angle de la 7ème rue et de la 33ème avenue. La caserne se trouve à l'angle de la 15ème rue et de la 40ème avenue. Il s'y rend tous les jours à pied et sans perdre de temps (i.e. dans le sens des numéros croissants aussi bien pour les rues que pour les avenues). Sachant qu'il a commencé à travailler le jour de ses 18 ans, et sachant qu'il n'est jamais passé deux fois par le même chemin, quel est l'âge maximum du capitaine ? Au total le capitaine des pompiers devra effectuer 15 choix (avancer dans le sens des avenues ou alors avancer dans le sens des rues). Si on considère comme un succès le fait d'avancer suivant les avenues et un échec le fait d'avancer suivant les rues, le nombre de chemin différent le conduisant à son travail est le nombre de chemins où il réussit 7 succès et 8 échec i.e $\binom{15}{7} = 6435$. Ainsi le capitaine des pompiers travaille depuis moins de 6435 jours, c'est-à-dire depuis moins de 18 ans (en arrondissant grossièrement). Ainsi il est clair que le capitaine des pompiers a au maximum entre 35 et 36 ans.