Correction du devoir commun 1S1 et 1S3

Exercice 1. Fonctions de références (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2|1-x| - |x+3|$$

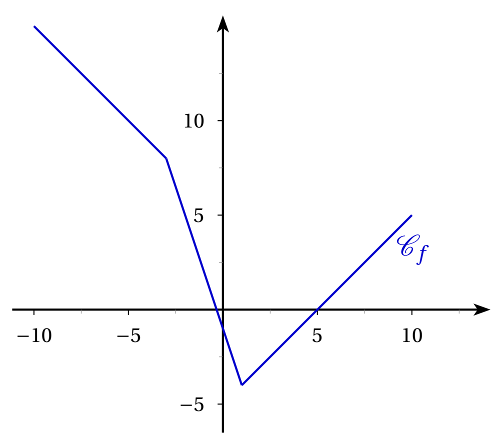
1. Ecrire $f(x)$ sans utiliser les valeurs absolues.
   On pourra vérifier que pour tout réel $x > 1$ on a $f(x) = x-5$
   Lorsque $x \geq 1$, $2|1-x| = 2(-1+x) = -2+2x$, en revanche lorsque $x \leq 1$ on a $2|1-x| = 2(1-x) = 2-2x$. De même lorsque $x \geq -3$ on a $|x+3| = x+3$ et lorsque $x \leq -3$ on a $|x+3| = -x-3$.
   On en déduit donc :

$$f(x) = \begin{cases} \text{pour } x > 1 \quad f(x) = -2+2x-(x+3) = x-5 \\ \text{pour } -3 \leq x \leq 1 \quad f(x) = 2-2x-(x+3) = 2-2x-x-3 = -3x-1 \\ \text{pour } x < -3 \quad f(x) = 2-2x-(-x-3) = 2-2x+x+3 = -x+5 \end{cases}$$

2. En déduire le tableau de variation de f.
   Sur l'intervalle $]-\infty;-3]$ $f(x) = -x+5$, il s'agit d'une expression affine avec un coefficient directeur négatif, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty;-3]$, en raisonnant de même on établit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

3. La fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ? Si oui lequel ?
   Du tableau de variation de la fonction f on déduit l'existence d'un minimum -4 atteint lorsque $x = 1$.
4. Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de f dans un repère orthonormé.



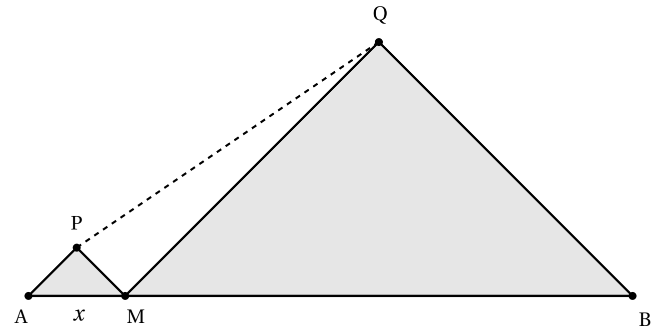
La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[-10;10]$.

5. Déterminer, graphiquement, les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.
   On se contentera de valeurs approchées.

$$\mathscr{S} = \left]-\frac{1}{3};5\right[$$

Exercice 2. Second degré (5 points)

Soit [AB] un segment de longueur 4 cm et soit M un point sur [AB]. Considérons les points P et Q tels que les triangles APM et BQM soient isocèles et rectangles respectivement en P et Q :



1. Justifier que

$$PM^2 = \frac{x^2}{2}$$

Le triangle APM étant rectangle et isocèle on déduit immédiatement du théorème de Pythagore que :

$$AP^2 + PM^2 = AM^2 \Longleftrightarrow 2PM^2 = x^2 \Longleftrightarrow PM^2 = \frac{x^2}{2}$$

2. De la même façon, exprimer QM^2 en fonction de x.
Effectivement de la même manière, en raisonnant dans le triangle rectangle et isocèle MBQ Pythagore donne cette fois :

$$QM^2 + QB^2 = MB^2 \Longleftrightarrow 2QM^2 = (4-x)^2 \Longleftrightarrow QM^2 = \frac{(4-x)^2}{2}$$

3. (a) Justifier que le triangle PQM est rectangle en M.
Puisque les triangles APM et MBQ sont rectangles et isocèles on a $\widehat{PMA} = \widehat{QMB} = \frac{\pi}{4}$, par conséquent :

$$\widehat{PMQ} = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi le triangle PQM est bien rectangle en M.

(b) En déduire que

$$PQ^2 = x^2 - 4x + 8$$

On vient de démontrer que PQM est rectangle en M, voici donc l'occasion d'appliquer le théorème de Pythagore pour la troisième fois :

$$PQ^2 = QM^2 + PM^2 = \frac{(4-x)^2 + x^2}{2} = \frac{16 - 8x + x^2 + x^2}{2} = x^2 - 4x + 8$$

4. (a) Résoudre l'équation

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Longleftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 2$$

(b) Existe-t-il des points M tels que la distance PQ soit égale à 2 ?

$$PQ = 2 \Longleftrightarrow PQ^2 = 4 \Longleftrightarrow x^2 - 4x + 8 = 4 \Longleftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

Or, d'après la question précédente, cette équation admet une solution, il existe donc un point tel que $PQ = 2$ obtenue pour $x = 2$.

5. (a) Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $[0;4]$ par

$$f(x) = x^2 - 4x + 8$$

$$x^2 - 4x + 8 = x^2 - 4x + 4 + 4 = (x-2)^2 + 4$$

De la forme canonique de f (coefficient positif devant le terme au carré) on tire le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	4	$\nearrow$	

Indication : On pourra déterminer la forme canonique de f puis en déduire son tableau de variation

(b) En déduire la position du point M pour que la distance PQ soit minimale. Préciser alors cette longueur PQ.

D'après la question précédente f admet un minimum qui est 4 atteint pour $x = 2$ i.e PQ^2 vaut au minimum 4, ainsi la distance PQ vaut au minimum 2 lorsque $x = 2$. Ainsi on minimise la distance PQ lorsque M est le milieu du segment [AB].

Exercice 3. Trigonométrie (4 points)

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

   i. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\mathscr{S} = \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right\}$$

   k parcourt l'ensemble des entiers relatifs.

   ii. $\sin x = \dfrac{1}{2}$

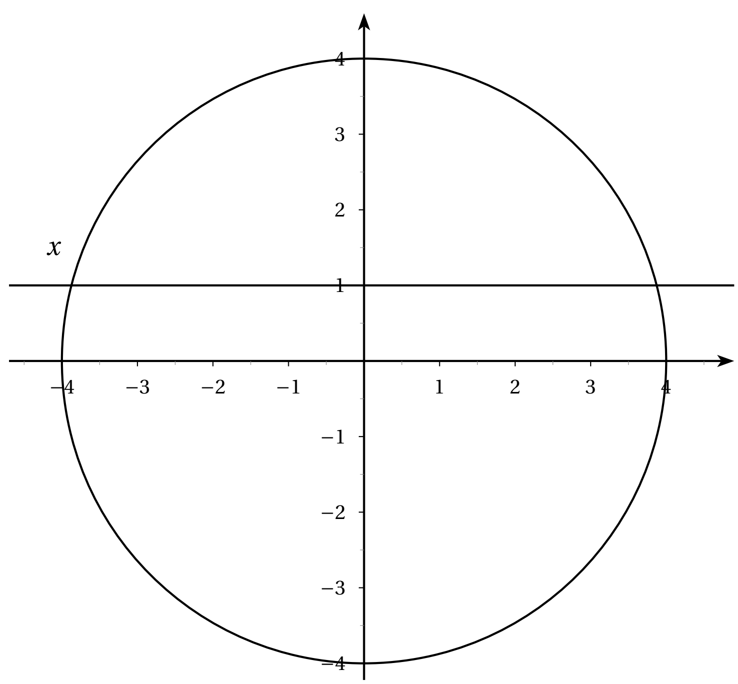
$$\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$$

   k parcourt l'ensemble des entiers relatifs.

   (b) Donner les solutions des 2 équations précédentes appartenant à l'intervalle $[0;2\pi]$. La première équation admet dans l'intervalle $[0;2\pi]$ deux solutions : $\dfrac{3\pi}{4}$ et $-\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi$ et la deuxième équation admet dans l'intervalle $[0;2\pi]$ deux solutions aussi : $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$.

2. On prend 4 cm comme unité graphique.
   On sait qu'un réel x appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ et que $\sin x = \dfrac{1}{4}$.

   (a) Placer x sur le cercle trigonométrique.



   (b) Quel est le signe de $\cos x$?
   A l'évidence, puisque $x \in \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$, $\cos x \leq 0$.

   (c) Calculer $\cos x$ (en donner une valeur exacte).
   On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Longleftrightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \Longleftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \text{ou} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

   On conclut en utilisant la question précédente que $\cos x = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

Exercice 4. Probabilité (5 points)

Afin de financer son voyage scolaire Sarah décide d'organiser une tombola.

Elle dispose de 50 tickets qu'elle vends 8 € chacun ; 15 d'entre eux sont gagnants et rapportent chacun aux heureux vainqueur la coquette somme de 20 €. Les autres tickets sont perdants.

1. (a) Le voyage scolaire coûte à Sarah 120 €. En supposant qu'elle vende tous les tickets fabriqués, cette tombola a-t-elle permis de financer son voyage ?

   Le bénéfice de Sarah (en comptant le prix du voyage) vaut :

   $$50\times 8-15\times 20-120=-20$$

   Il lui manque seulement 20 euros pour financer son voyage.

   (b) Sarah souhaite que cette tombola finance à l'euro près son voyage scolaire. Si elle ne modifie pas le prix du ticket et le nombre de ticket gagnant quelle récompense m doit-elle proposer pour chacun des 15 tickets gagnants ?

   On cherche m tel que son bénéfice soit nul i.e tel que :

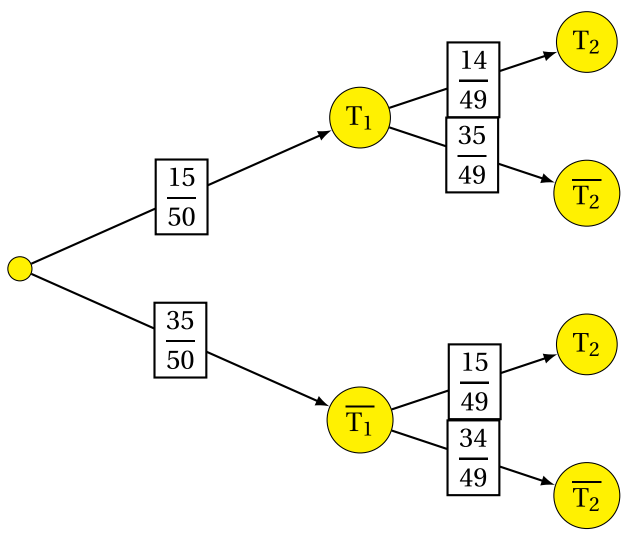
   $$50\times 8-15m-120=0\iff m=\frac{280}{15}=\frac{56}{3}\simeq 18{,}67$$

   Elle doit proposer environ 18, 67 euros comme récompense pour financer en totalité son voyage.

2. Léo achètent deux tickets à Sarah.

   On note T_1 l'événement « le premier ticket acheté par Léo est gagnant » et T_2 l'événement « le second ticket acheté par Léo est gagnant ».

   (a) Réaliser un arbre pondéré qui modélise cette expérience aléatoire.



   (b) Soit A l'événement « les deux tickets de Léo sont gagnants », montrer que :

   $$p(\text{A})=\frac{3}{35}$$

   $$p(\text{A})=\frac{15}{50}\times\frac{14}{49}=\frac{3}{35}$$

   (c) Soit B l'événement « Léo a acheté exactement un ticket gagnant sur les deux », déterminer $p(\text{B})$.

   $$p(\text{B})=\frac{15}{50}\times\frac{35}{49}+\frac{35}{50}\times\frac{15}{49}=\frac{3}{7}$$

   (d) On note G la variable aléatoire donnant les gains de Léo.

   Reproduire et compléter le tableau suivant (en détaillant les calculs) :

G	-16	4	24	Total
$p(\mathrm{G}=x_i)$	$\frac{17}{35}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{35}$	1

Si les deux tickets de Léo sont gagnants alors il gagne $40-2\times 8=24$ euros et si un seul ticket est gagnant il gagne 4 euros. Les probabilités des événements $(\mathrm{G}=24)$ et $(\mathrm{G}=4)$ ont été calculé dans les deux questions précédentes, la troisième s'obtient en se souvenant que la somme des probabilité de toutes les issues vaut 1.

(e) Calculer l'espérance de G. Interpréter.

$\mathrm{E(G)} = -16\times\frac{17}{35}+4\times\frac{3}{7}+24\times\frac{3}{35}<0.$

Puisque l'espérance est négative, cette expérience est défavorable (du moins d'un point de vue financier) à Léo.

Exercice 5. Vecteurs (6 points)

A, B et C sont trois points non alignés du plan. Les points G et F sont définis par :

$$\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BG}+3\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{0} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{CA}$$

PARTIE A.

1. Démontrer que

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BG}+3\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AG}+3\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{0} \iff 6\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

2. Compléter la figure donnée en annexe 1.
3. Exprimer $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{CA}=-2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$$

4. Que peut-on dire du quadrilatère AGBF ? (justifier).
   Probablement qu'il s'agit d'un trapèze (compte tenu de la figure)...
   En effet :

$$\overrightarrow{BF}=-2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=-6\times\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=-6\overrightarrow{AG}$$

   Les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont donc colinéaires ce qui prouve que le quadrilatère en question est un trapèze.

PARTIE B.

On se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

1. Expliquer pourquoi $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est un repère du plan.
   Les points A, B et C n'étant pas alignés $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est un repère du plan.
2. Donner les coordonnées de A, B, C et G puis prouver que $F(-1;-3)$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.
   De manière immédiate on a $A(0;0)$, $B(1;0)$ et $C(0;1)$.
   De la relation $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ on déduit que $G\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$.
   Enfin

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$$

   De cette dernière égalité on déduit, comme demandé, que $F(-1;-3)$.
3. Préciser un vecteur directeur de (BF) puis déterminer l'équation de la droite (BF).
   Un vecteur directeur de (BF) est par exemple $\overrightarrow{AG}$ puisque le quadrilatère AGBF est un trapèze.
   Ainsi $M(x;y)\in(BF) \iff \overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AG}$ colinéaires.
   Les coordonnées de ces deux derniers vecteurs sont $\overrightarrow{AG}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{BM}(x-1;y)$.
   On peut conclure, l'équation de (BF) est :

$$\frac{y}{3}-\frac{x-1}{2}=0 \iff 2y-3(x-1)=0 \iff -3x+2y=-3$$

4. La droite d'équation $\mathscr{D}:\frac{3}{2}x+y=0$ que l'on tracera est-elle parallèle à (BF) ?
   Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ a pour coordonnées $\left(1;-\frac{3}{2}\right)$ qui n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AG}$ (coordonnées de signe contraire pour le premier et de signe identique pour le second). Puisque un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ n'est pas un vecteur directeur de (BF) il est clair que ces deux droites ne peuvent être parallèles.
5. Le point $E\left(2;-\frac{3}{2}\right)$ est-il un point de $\mathscr{D}$?

On remplace dans l'équation de $\mathscr{D}$, x et y par les coordonnées de E :

$$1,5 \times 2 - 1,5 \neq 0$$

par conséquent $\mathrm{E} \notin \mathscr{D}$.

Exercice 6. Suites Numériques (5 points)

On considère une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Données:
u est un nombre réel.
i et n sont des nombres entiers.

$u := -\dfrac{1}{2}$
Entrer n
Pour i allant de 1 à n **Faire**
  $u := 2u - 1$
Fin Pour
Afficher u

1. (a) Qu'affiche l'algorithme si l'utilisateur entre $n = 1$? et $n = 5$?

   Si l'utilisateur entre $n = 1$ alors on effectue une fois les instructions dans la boucle for :
   $u = 2 \times (-0,5) - 1 = -2$ et on affiche alors -2.
   Si l'utilisateur entre $n = 5$ alors on effectue 5 fois les intructions dans la boucle for :
   $u = -2$ pour $i = 1$ puis $u = -5$ pour $i = 2$ puis $u = -11$ pour $i = 3$ puis $u = -23$ pour $i = 4$ et enfin $u = -47$ pour $i = 5$.
   On quitte la boucle for (au revoir boucle for...) et on affiche -47.

   (b) Que fait cet algorithme ?

   Cet algorithme affiche la valeur du n ième terme de la suite définie ci-après.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = -\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$$

   (a) Donner la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

   Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$.

   (b) Dans un repère donnée en annexe, à l'aide de la représentation graphique de la fonction f et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ placer sur l'axe des abscisses les termes de u_0 à u_3.

   (c) Conjecturer le sens de variation de la suite u et sa limite.

   On observe que $u_3 < u_2 < u_1 < u_0$, jl semble donc que la suite est décroissante, de plus on a la nette impression que sa limite est $-\infty$.

3. On **admet que** la suite u peut se définir pour tout entier naturel n par :

$$u_n = -\frac{3}{2} \times 2^n + 1$$

   (a) Vérifier cette formule en calculant u_0 ; u_1 ; u_2 et u_5.

   $u_0 = -\dfrac{3}{2} \times 2^n + 1 = -2$; $u_1 = -\dfrac{3}{2} \times 2^1 + 1 = -5$; $u_2 = -\dfrac{3}{2} \times 2^2 + 1 = -11$ et $u_5 = -\dfrac{3}{2} \times 2^5 + 1 = -47$.
   Tiens on constate que les résultats sont identiques avec les résultats trouvés dans la première question, il ne semble donc pas absurde de penser que cette formule est correcte. Cependant, bien entendu, ne pas le démontrer reste frustrant j'en conviens…

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{2} \times 2^n$$

$$u_{n+1}-u_n=-\frac{3}{2}\times 2^{n+1}+1-\left(-\frac{3}{2}\times 2^n+1\right)=-\frac{3}{2}\times 2^n\times 2+\frac{3}{2}\times 2^n=-3\times 2^n+1,5\times 2^n=-1,5\times 2^n=-\frac{3}{2}\times 2^n$$

(c) En déduire le sens de variation de la suite u.

n désignant un nombre entier positif le nombre $-\frac{3}{2}\times 2^n<0$ pour tout entier n, ainsi pour tout n on a :

$$u_{n+1}-u_n<0 \Longleftrightarrow u_{n+1}<u_n$$

La suite u est par conséquent décroissante (strictement même).

4. **Bonus** : Modifier l'algorithme de départ afin que pour un tout nombre réel A > 0 entré par l'utilisateur il renvoie le premier entier n tel que

$$u_n<-\mathrm{A}$$

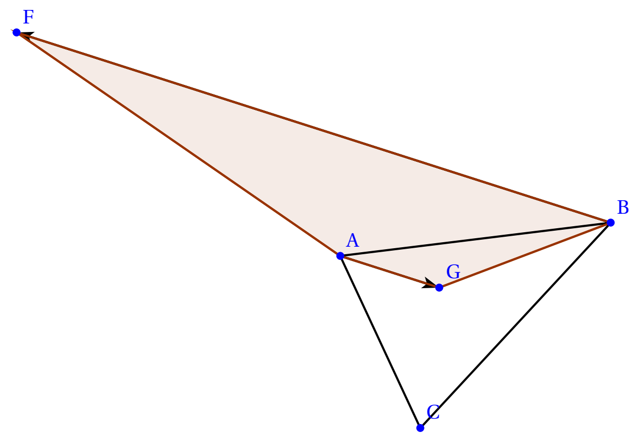
Plutôt que de le modifier, mieux vaut le refaire, allons-y :

Algorithme 2 :

Données:
u est un réel et A un réel strictement positif
i et n sont des nombres entiers.

$u:=-\frac{1}{2}$
$n:=0$
Entrer A (un réel positif donc)
Tant que $(u>-\mathrm{A})$ **Faire**
    $u:=2u-1$ et $n:=n+1$
Fin Tant que
renvoyer n

Annexe 1 : Exercice sur les vecteurs



Annexe 2-Exercice sur les suites