

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 4

Exercice 1.

(6 points)

1. Dresser le tableau de signe des trinômes suivants :

(a) $-2x^2 + 5x + 4$

$\Delta = b^2 - 4ac = 49 + 60 = 57$, donc le trinôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{57}}{-4} = \frac{5 + \sqrt{57}}{4} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - \sqrt{57}}{4}$$

x	$-\infty$	$\frac{5-\sqrt{57}}{4}$	$\frac{5+\sqrt{57}}{4}$	$+\infty$	
$-2x^2+5x+4$	-	0	+	0	-

(b) $3x^2 - 7x + 5$

$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 60 = -11 < 0$, donc le trinôme n'admet pas de racines et conservent un signe constant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$3x^2 - 7x + 5$	+	

(c) $4x^2 + 4x + 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$, donc le trinôme admet une unique racine :

$$x_3 = \frac{-b}{2a} = -\frac{4}{8} = -0,5$$

x	$-\infty$	$-0,5$	$+\infty$
$4x^2 + 4x + 1$	+	0	+

(d) $x^2 - x - 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 = 5$, donc le trinôme admet deux racines :

$$x_4 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad x_5 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$	
x^2-x-1	+	0	-	0	+

2. Pour chacun des trinômes précédents donner, si possible, une factorisation.

$-2x^2 + 5x + 4 = -2(x - x_1)(x - x_2)$, voir x_1 et x_2 plus haut.

$3x^2 - 7x + 5$ n'admet pas de factorisation.

$4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$.

$x^2 - x - 1 = (x - x_4)(x - x_5)$, voir x_4 et x_5 plus haut.

3. En vous servant des tableaux de signes de la première question, donner l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ des équations et inéquations suivantes :

(a) $-2x^2 + 5x + 4 = 0$

$$\mathcal{S} = \{x_2; x_1\}$$

(b) $3x^2 - 7x + 5 \geq 0$

$\mathcal{S} = \mathbb{R}$

(c) $4x^2 + 4x + 1 < 0$

$\mathcal{S} = \emptyset$

(d) $x^2 - x - 1 \leq 0$

$\mathcal{S} = [x_4; x_5]$

Exercice 2.

4 points)

On donne les équations des paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$:

$$\mathcal{P} : y = x^2 - 6x + 10 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}' : y = -2x^2 + 18x - 30$$

1. Déterminer les éventuels points d'intersection des paraboles
- $\mathcal{P}$
- et
- $\mathcal{P}'$
- avec l'axe des abscisses.

– $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses :

$$x^2 - 6x + 10 = 0$$

 $\Delta = 36 - 4 \times 10 = -4 < 0$ donc $\mathcal{P}$ ne coupe pas l'axe des abscisses.– $\mathcal{P}'$ avec l'axe des abscisses :

$$-2x^2 + 18x - 30 = 0$$

 $\Delta = 18^2 - 4 \times 2 \times 30 = 84$, donc $\mathcal{P}'$ coupe l'axe des abscisses en deux points dont voici les abscisses :

$$x_1 = \frac{-18 - \sqrt{84}}{-4} = \frac{18 + \sqrt{84}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-18 + \sqrt{84}}{-4} = \frac{18 - \sqrt{84}}{4}$$

 $\mathcal{P}'$ coupe l'axe des abscisses en deux points de coordonnées $(x_1; 0)$ et $(x_2; 0)$.

2. Déterminer les éventuels points d'intersection de
- $\mathcal{P}$
- et
- $\mathcal{P}'$
- .

On cherche les éventuels abscisses de ces points en résolvant :

$$x^2 - 6x + 10 = -2x^2 + 18x - 30 \iff 3x^2 - 24x + 40 = 0$$

 $\Delta = b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4 \times 3 \times 40 = 96$, il y a par conséquent deux solutions :

$$x_1 = \frac{24 - \sqrt{96}}{6} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{24 + \sqrt{96}}{6}$$

L'ordonnée de ces points vaut :

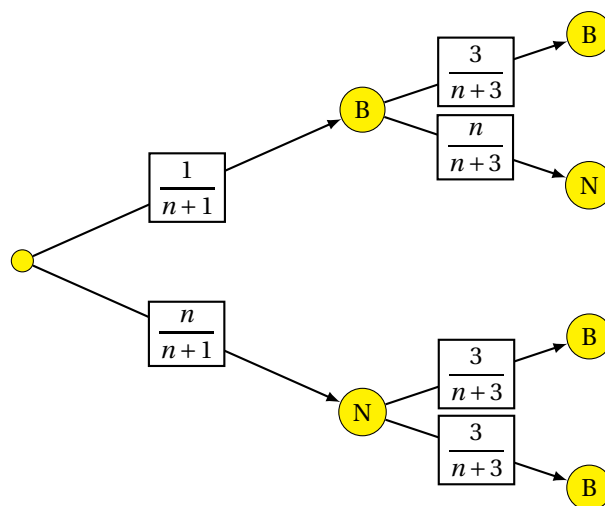
$$y_1 = \left(\frac{24 - \sqrt{96}}{6} \right)^2 - 6 \times \frac{24 - \sqrt{96}}{6} + 10 \quad \text{et} \quad y_2 = \left(\frac{24 + \sqrt{96}}{6} \right)^2 - 6 \times \frac{24 + \sqrt{96}}{6} + 10$$

 $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont deux points d'intersection de coordonnées $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$.**Exercice 3.**

(4 points)

On dispose de deux boîtes B_1 et B_2 contenant chacune des boules blanches et des boules noires, indiscernables au toucher.La boîte B_1 contient n boules noires et 1 boule blanche ; la boîte B_2 contient n boules noires et 3 boules blanches (n est un entier naturel supérieur ou égal à 1). On tire au hasard une boule dans la boîte B_1 puis une boule dans la boîte B_2 .

1. Réaliser un arbre pondéré permettant de décrire cette expérience aléatoire.



2. Déterminer l'entier n tel que la probabilité de tirer successivement deux boules blanches soit égale à $\frac{1}{120}$.

$$p(\text{« obtenir deux boules blanches »}) = \frac{1}{n+1} \times \frac{3}{n+3} = \frac{3}{(n+1)(n+3)}$$

On cherche n tel que :

$$\frac{3}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{120} \Leftrightarrow 3 \times 120 = (n+1)(n+3) \Leftrightarrow 360 = n^2 + 3n + n + 3 \Leftrightarrow n^2 + 4n - 357 = 0$$

$$\Delta = 16 + 4 \times 357 = 1444 = 38^2$$

$$x_1 = \frac{-4+38}{2} = 16 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4-38}{2} = -21$$

Au final pour $n = 16$ la probabilité de tirer successivement deux boules blanches est égale à $\frac{1}{120}$

3. Déterminer l'entier n tel que la probabilité de tirer successivement deux boules noires soit égale à $\frac{25}{32}$.

$$p(\text{« obtenir deux boules noires »}) = \frac{n}{n+1} \times \frac{n}{n+3} = \frac{n^2}{(n+1)(n+3)}$$

On cherche n tel que :

$$\frac{n^2}{(n+1)(n+3)} = \frac{25}{32} \Leftrightarrow 32n^2 = 25(n+1)(n+3) \Leftrightarrow 32n^2 = 25(n^2 + 4n + 3) \Leftrightarrow 7n^2 - 100n - 75 = 0$$

$$\Delta = 100^2 + 4 \times 7 \times 75 = 110^2 \text{ d'où :}$$

$$x_1 = \frac{100-110}{14} < 0 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{100+110}{14} = 15$$

Au final pour $n = 15$ la probabilité de tirer successivement deux boules noires est égale à $\frac{25}{32}$

4. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles la probabilité de tirer successivement deux boules blanches est strictement inférieure à $\frac{1}{1000}$.

On cherche n tel que

$$\frac{3}{(n+1)(n+3)} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow 3000 < (n+1)(n+3) \Leftrightarrow 0 < n^2 + 4n - 2997$$

$$\Delta = 16 + 4 \times 2997 = 12004.$$

$$x_1 = \frac{-4-\sqrt{12004}}{2} < 0 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4+\sqrt{12004}}{2} \simeq 52,8$$

Par conséquent dès que $n \geq 53$ on a $n^2 + 4n - 2997 > 0$ et donc la probabilité de tirer successivement deux boules blanche strictement inférieure à 0,001.

Exercice 4.

(4 points)

1. Six entiers naturels consécutifs sont tels que le produit des deux plus petits nombres est égal au triple de la somme des quatre plus grands. Déterminer ces six entiers.

Notons n le plus petit des six entiers. n vérifie :

$$n(n+1) = 3(n+2+n+3+n+4+n+5) \iff n^2 + n = 3(4n+14) \iff n^2 + n = 12n + 42 \iff n^2 - 11n - 42 = 0$$

$\Delta = 121 + 4 \times 42 = 289 = 17^2$, ainsi :

$$n_1 = \frac{11-17}{2} = -3 \quad \text{ou} \quad n_2 = \frac{11+17}{2} = 14$$

Seul $n = 14$ est possible, ainsi les 6 entiers consécutifs vérifiant la condition voulue sont 14, 15, 16, 17, 18 et 19.

2. Trouver toutes les suites de 5 entiers consécutifs tels que la somme des carrés des trois premiers nombres soit égale à la somme des carrés des deux derniers.

Notons n le plus petit de ces entiers, n vérifie :

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = (n+3)^2 + (n+4)^2 \iff n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = n^2 + 6n + 9 + n^2 + 8n + 16 \iff n^2 - 8n - 20 = 0$$

$\Delta = 64 + 80 = 144 = 12^2$, il y a donc deux solutions :

$$n_1 = \frac{8-12}{2} = -2 \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{8+12}{2} = 10$$

Il existe deux séries de 5 entiers consécutifs vérifiant la condition voulue, la première -2, -1, 0, 1 et 2 et la deuxième 10, 11, 12, 13 et 14.

Exercice 5.

(4 points)

1. On considère la trinôme suivant : $x^2 - (2m+3)x + m^2$

Pour quelle valeur de m a-t-il une unique racine ?

Calculer alors la valeur de cette racine.

Le trinôme $x^2 - (2m+3)x + m^2$ admet une racine unique si et seulement si $\Delta = 0 \iff (2m+3)^2 - 4m^2 = 0$. Et :

$$(2m+3)^2 - 4m^2 = 0 \iff 4m^2 + 12m + 9 - 4m^2 = 0 \iff 12m = -9 \iff m = -\frac{3}{4}$$

Pour $m = -\frac{3}{4}$ le trinôme admet une racine unique. De plus il s'écrit :

$$x^2 - (2m+3)x + m^2 = x^2 - 4,5x + \frac{9}{4}$$

et la racine est :

$$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{4,5}{2} = \frac{9}{4}$$

2. On considère la courbe $\mathcal{C}_f : y = 3x^2 - 2x + 1$ et la droite $\mathcal{D} : y = m$.

Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ ont exactement deux points d'intersection.

$$3x^2 - 2x + 1 = m \iff 3x^2 - 2x + 1 - m = 0.$$

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ ont exactement deux points d'intersection si et seulement si le discriminant du trinôme $3x^2 - 2x + 1 - m$ est strictement positif i.e :

$$\Delta > 0 \iff 4 - 12(1 - m) > 0 \iff 4 - 12 + 12m > 0 \iff -8 + 12m > 0 \iff 12m > 8 \iff m > \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Par conséquent $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ ont exactement deux points d'intersection si et seulement si $m > \frac{2}{3}$.

Exercice 6.**Question Cactus**

Un automobiliste se rend de Colmar à Nancy, villes distantes de 150 km. Au retour, sa vitesse moyenne est supérieure de 25 km.h⁻¹ à celle qu'il a réalisée à l'aller. Déterminer ces deux vitesses sachant qu'il roulé pendant exactement cinq heures.

On sait que $v = \frac{d}{t}$. Notons t_1 le temps que l'automobiliste a mis à l'aller et v_1 sa vitesse moyenne à l'aller. Comme $v_1 = \frac{150}{t_1}$ on a $t_1 = \frac{150}{v_1}$.

De plus on a aussi, pour le retour : $v_1 + 25 = \frac{150}{5 - t_1} \iff (v_1 + 25)(5 - t_1) = 150 \iff (v_1 + 25) \left(5 - \frac{150}{v_1} \right) = 150$.

Au final on cherche v_1 tel que :

$$(v_1 + 25)(5 - t_1) = 150 \iff (v_1 + 25) \left(5 - \frac{150}{v_1} \right) = 150 \iff 5v_1 - 150 + 125 - \frac{3750}{v_1} = 150 \iff 5v_1^2 - 25v_1 - 3750 = 150v_1 \iff 5v_1^2 - 175v_1 - 3750 = 0$$

$$\Delta = 175^2 + 4 \times 5 \times 3750 = 105625 = 325^2 \text{ d'où :}$$

$$v_1 = \frac{175 - 325}{10} < 0 \text{ impossible} \quad \text{donc} \quad v_1 = \frac{175 + 325}{10} = 50$$

Cet automobiliste a donc roulé à 50 km.h⁻¹ à l'aller et 75 km.h⁻¹ au retour.

Il lui a donc fallu 3 heures à l'aller et 2 heures au retour.