CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 3

Exercice 1. (9 points)

L'un des jeux les plus importants pour les peuples Syldaves et Grolandais est un jeu de mémoire, nommé JM. Afin de se qualifier pour les championnats du monde, Pssgklm le syldave doit réussir les deux épreuves suivantes :

– La première épreuve consiste à réciter les 10000 premières décimales de π sans se tromper.
– La seconde épreuve consiste à énumérer la liste des 1000 derniers champions du monde de JM.

Pssgklm sait qu'il a 75% de chances de réussir la première épreuve pour laquelle il est très entraîné, en revanche il n'a qu'une chance sur trois de réussir la seconde.

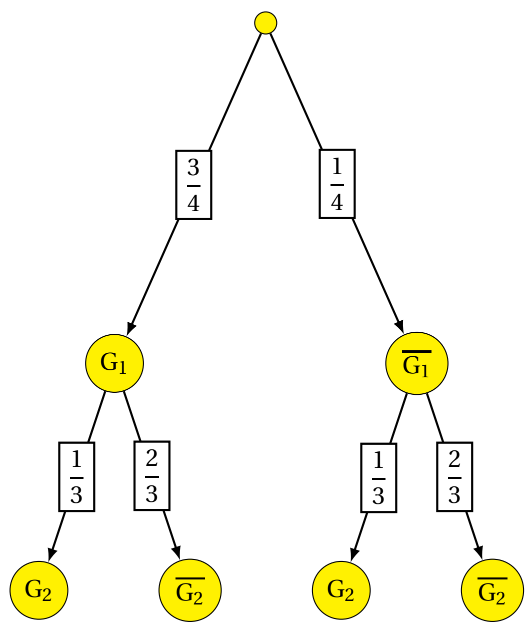
Le gouvernement Syldave décide de récompenser ses athlètes de la manière suivante :

– 10000 bonbons syldaves pour un Syldave réussissant les deux épreuves.
– 1000 bonbons syldaves pour un Syldave réussissant une seule des deux épreuves.
– et rien pour un Syldave échouant aux deux épreuves.

Chaque Syldave doit payer 5000 bonbons Syldave pour participer au concours.

1. Décrire par un arbre pondéré cette expérience aléatoire.

Notons G_i, pour $i = 1$ ou $i = 2$, l'événement P. (nous le nommerons désormais ainsi) réussit sa i−ème figure.



2. Calculer la probabilité que Pssgklm se qualifie pour les championnats du monde.

$$P(G_1 \cap G_2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

3. Calculer la probabilité que Pssgklm réussisse une seule des deux épreuves.

$$p(G_1 \cap \overline{G_2}) + p(\overline{G_1} \cap G_2) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{123}$$

4. On note G la variable aléatoire donnant les gains de Pssgklm en bonbons syldaves.

(a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G. La probabilité que P. loupe les deux figures est de $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$, d'où :

Gain G	5000	−4000	−5000	Total
$p(G = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{6}$	1

(b) Déterminer l'espérance de G. Pssgklm a-t-il raison de payer 5000 bonbons syldaves pour tenter de participer au championnat du monde ?

$$E(G) = 5000 \times \frac{1}{4} - 4000 \times \frac{7}{12} - 5000 \times \frac{1}{6} \simeq -1917$$

Il est perdant en moyenne (en bonbons Syldave), mais il est peut-être pas du tout intéressé par les bonbons syldaves et puis s'entraîner des semaines entières (en apprenant des décimales de π) pour ne pas participer au concours serait un curieux choix…

(c) Déterminer l'écart-type σ(G). Interpréter.

$$V(G) = E(G^2) - E(G)^2 \simeq 5000^2 \times \frac{1}{4} + 4000^2 \times \frac{7}{12} + 5000^2 \times \frac{1}{6} - (-1916)^2 \simeq 16076376$$

Ainsi $\sigma(G) = \sqrt{V(G)} \simeq 4010$.
En moyenne les résultats de P. seront concentrés entre $-1919 - 4010$ et $-1919 + 4010$.

5. Le gouvernement Grolandais propose à notre héros (Pssgklm) la nationalition. En acceptant il multiplierait ses gains en bonbons Syldave par deux, mais devrait donner une participation deux fois plus importante pour s'inscrire aux qualifications.
On note Y la variable aléatoire donnant les gains de Pssgklm en bonbons Syldave offert par le gouvernement Grolandais.

(a) Exprimer Y en fonction de G.

$$Y = 2G$$

(b) Calculer E(Y) puis σ(Y).

$$E(Y) = 2E(G) \simeq -3833$$

$$\sigma(Y) = 2\sigma(G) \simeq 8020$$

(c) Pssgklm doit-il accepter la nationalisation sachant qu'il n'a d'intérêt que pour les bonbons syldaves ?
Au regard de l'espérance P. n'a pas intérêt à accepter les bonbons syldaves mais si véritablement il n'a d'intérêt que pour les bonbons syldaves, alors compte tenu du risque très élevé (cela signifie qu'en plus de risquer perdre beaucoup il risque de gagner pas mal), P. devrait sérieusement hésité.

Exercice 2. (2 points)

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs 2 ; 5 ; 7 et 9. Soit a un réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$. La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau ci-dessous :

x_i	2	5	7	9
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	a

1. Déterminer a.
On a :

$$a + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = 1 \iff a = 1 - \frac{2}{10} - \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

2. En utilisant la calculatrice, donner l'espérance et l'écart-type de X.
On trouve $E(X) = 6,2$ et $\sigma(X) \simeq 2,7$.

Exercice 3. (5 points)

Une usine produit des pièces électroniques. L'ensemble de la production est vendue. Une pièce est vendue 15 €.
On sait que :
- chaque pièce coûte 7 euros à produire et à tester ;
- il faut compter 4 euros supplémentaires pour réparer une pièce.

En moyenne on observe, pour un échantillon de 2000 pièces prélevées au hasard, les proportions données par le tableau suivant :

pièce défectueuses	pièces non défectueuses	Total
60	1940	2000

1. On note X la variable aléatoire donnant le gain par pièce vendue.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Gain x_i	4	8
$p(\mathrm{X}=x_i)$	$\frac{60}{2000}$	$\frac{1940}{2000}$

   (b) Calculer le gain moyen par pièce vendue.

$$4\frac{60}{2000}+8\times\frac{1940}{2000}\simeq 7,88$$

   Le gain moyen par pièce vendue est de $7,88$ €.

   (c) Sachant que les ateliers fabriquent 30000 pièces par an. Estimer le gain annuel en euros de l'entreprise.

$$7,88\times 30000 = 236400$$

   On s'attends à un gain annuel autour de 236400 €.

2. Le PDG de cette entreprise envisage d'éliminier les pièces défectueuses sans les réparer et de vendre 20 €les pièces non défectueuses. Cette stratégie est-elle rentable pour l'entreprise ?

$$-7\frac{60}{2000}+13\times\frac{1940}{2000}\simeq 12,4$$

   Cette stratégie est rentable pour l'entreprise.

Exercice 4. (4 points)

Un sac contient 100 boules. Sur chacune des ces boules est inscrit l'un des numéros 0, 1, 2, 3 ou 4. Le tableau ci-dessous donne la répartition de ces boules suivant leur numéro :

Numéro Inscrit	0	1	2	3	4
Nombre de boules	30	25	20	15	10

Un joueur joue à un jeu dont la règle suit l'algorithme suivant :

Algorithme 1 : *Tirer une boule*

Données: n est un nombre entier compris entre 0 et 4
$Gain$ est un entier.
n prend une valeur entière, au hasard, entre 0 et 4.
Si (n est pair) **Alors**
    $Gain := n$
Sinon
    $Gain := -n$
Fin Si
Afficher « Vous avez gagné » $Gain$ « euros ».

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque numéro de boule tirée, associe le gain du joueur.

1. Quelles sont les valeurs prise par X ?
   X prends les valeurs 0, -1, 2, -3 et 4.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.

x_i	0	-1	2	-3	4
$p(X = x_i)$	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10

3. Calculer l'espérance E(X). Le jeu est-il avantageux pour le joueur ?

$$E(X) = 0 \times 0,3 - 0,25 + 0,4 - 0,45 + 0,4 = 0,1$$

Le jeu est très légèrement avantageux pour le joueur.

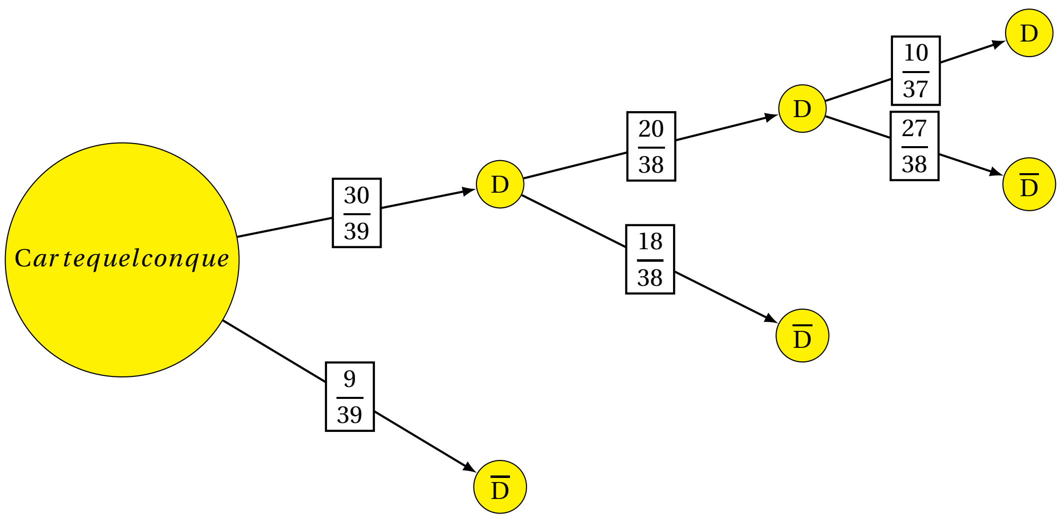
Exercice 5. **Question Cactus**

Venus en France en 1665, Christiaan Huygens a étudié des problèmes traités et proposés par Fermat et Pascal.

Enoncé de l'un des problèmes : On a un jeu de 40 cartes contenant 10 cartes de 4 couleurs différentes.

On tire 4 cartes de ce jeu.

Huygens veut connaître la probabilité d'avoir tiré une carte de chaque couleur. On note D l'événement : « la carte tirée n'est pas de la même couleur que les précédentes ».



$$1 \times \frac{30}{39} \times \frac{20}{38} \times \frac{10}{37} = \frac{1000}{9139}$$

La probabilité d'avoir tiré une carte de chaque couleur est $\frac{1000}{9139}$, soit un peu moins d'une chance sur neuf.