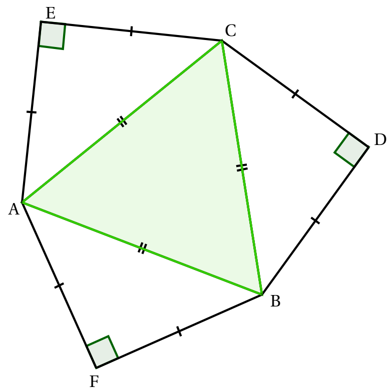
CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 2

Exercice 1. (5 points)

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral direct, CBD, ACE et AFB sont des triangles rectangles isocèles respectivement en D, E et F.
Déterminer la mesure principale, en radians, des angles suivants :

$$\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}\right),\quad \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BF}\right),\quad \left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right)^{1},\quad \left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}\right) \text{ et } \left(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{CA}\right)$$

Indication :



Il pourra être utile d'utiliser la relation de Chasles.

Le triangle ACE est rectangle isocèle, par conséquent :

$$\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}\right)=\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$$

On utilise la relation de Chasles :

$$\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BF}\right)=\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BF}\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}\,[2\pi]$$

On sait que : $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)+\pi$, par conséquent :

$$\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}\,[2\pi]$$

On utilise la relation de Chasles :

$$\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}\right)=\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=-\frac{7\pi}{12}\,[2\pi]$$

Et enfin :

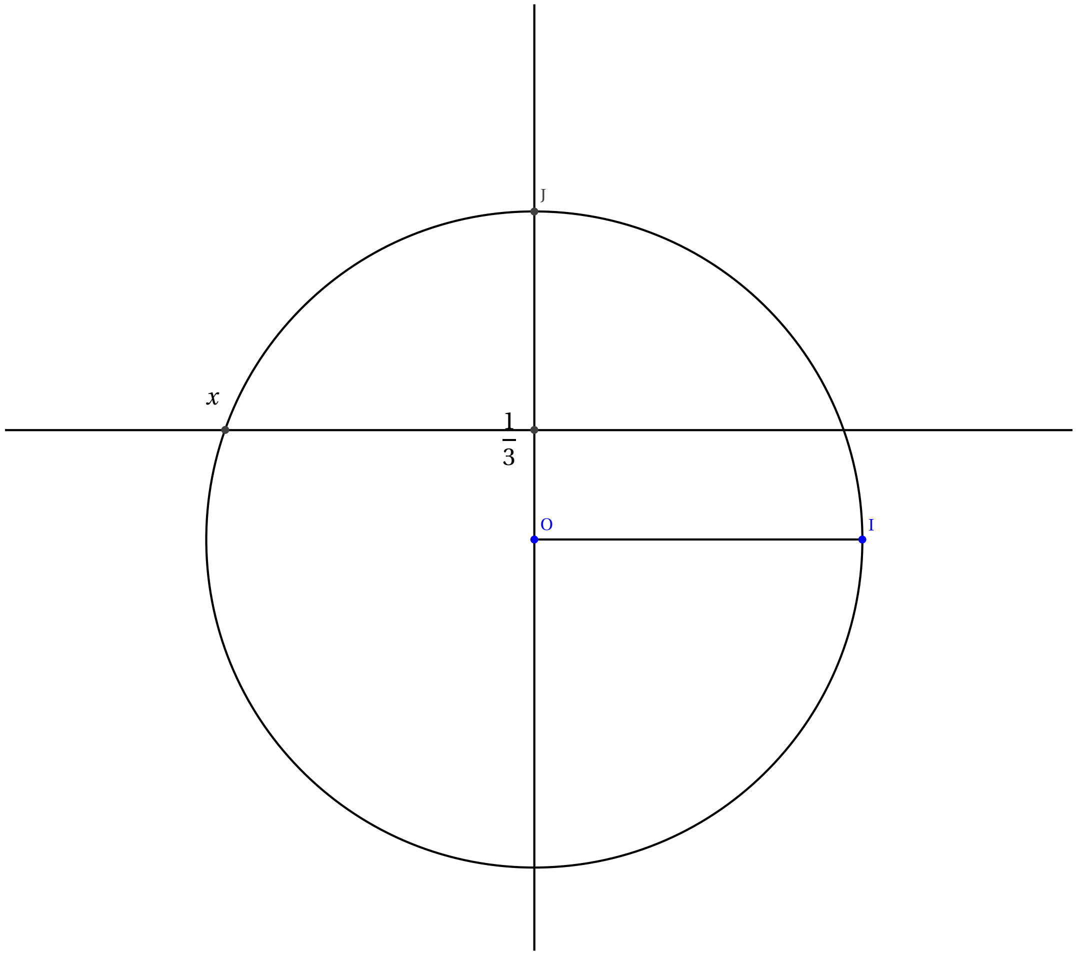
$$\left(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{CA}\right)=\left(-\overrightarrow{EA};-\overrightarrow{CA}\right)=\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$$

Exercice 2. (4 points)

On prend 3 cm comme unité graphique. On sait qu'un réel x appartient à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ et que $\sin(x)=\frac{1}{3}$.

1. Placer x sur le cercle trigonométrique.

1. On rappelle que quel que soit les points A, B et C on a $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)+\pi[2\pi]$



2. Quel est le signe de $\cos x$?
   Puisque $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ on a $\cos x < 0$.
3. Calculer $\cos(x)$ **(en valeur exacte)**.
   On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
   $$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \iff \cos^2 x + \frac{1}{9} = 1 \iff \cos^2 x = \frac{8}{9} \iff \cos x = \frac{\sqrt{8}}{3} \qquad \text{ou} \qquad \cos x = -\frac{\sqrt{8}}{3}$$
   D'après la question précédente $\cos x < 0$, par conséquent :
   $$\cos x = -\frac{\sqrt{8}}{3}$$
4. Donner une valeur approchée de x à 10^{-2} près, à l'aide de la calculatrice.
   $$x = \cos^{-1}\frac{\sqrt{8}}{3} \simeq 2,8$$

Exercice 3. (6 points)

1. (a) Résoudre l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$ dans :
   - Dans $]-\pi;\pi]$, $\mathscr{S} = \{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\}$
   - Dans $[0;2\pi[$, $\mathscr{S} = \{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\}$
   - Dans $\mathbb{R}$, $\mathscr{S} = \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$ où k désigne un entier.

(b) Le nombre $\frac{65\pi}{6}$ est-il solution de cette équation dans $\mathbb{R}$?

$$\frac{65\pi}{6} - 5\times 2\pi = \frac{65\pi}{6} - \frac{60\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Par conséquent le nombre $\frac{65\pi}{6}$ est solution de l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$.

2. (a) Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

$$\mathscr{S} = \{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\}$$

(b) Le nombre $-\frac{22\pi}{3}$ est-il solution de cette équation dans $\mathbb{R}$?

$$-\frac{22\pi}{3} + 4\times 2\pi = -\frac{22\pi}{3} + \frac{24\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Ainsi le nombre $-\frac{22\pi}{3}$ n'est pas solution de l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$, puisque $\cos\frac{-22\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

3. (a) Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'équation $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\mathscr{S} = \{-\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\}$$

(b) En déduire les solutions de l'inéquation $\cos(x) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$.

On a, dans $]-\pi;\pi]$, $\cos(x) > -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff -\frac{3\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$, par conséquent :

$$\mathscr{S} = \left]-\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[$$

Exercice 4. *de la trigonométrie avec* $\frac{\pi}{8}$ (10 points)

On considère un repère orthonormal (O;I,J). 8 cm représente 1 unité graphique.
On note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O passant par I, soiit B le point de $\mathscr{C}$ tel que :

$$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{4}$$

1. (a) Construire la figure en laissant les traits de construction apparent.
   (b) Placer le point $A \in \mathscr{C}$ tel que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{8}$
   (c) Construire le polygone régulier à 16 côtés dont A, I et J sont des sommets.
   (d) Placer les points C, D, E, F et G de $\mathscr{C}$ tels que :

$$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}\right) = -\frac{\pi}{8} \qquad \left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OD}\right) = \frac{7\pi}{8} \qquad \left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OE}\right) = -\frac{7\pi}{8} \qquad \left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OF}\right) = \frac{3\pi}{8} \qquad \text{et} \qquad \left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OG}\right) = \frac{5\pi}{8}$$

2. Donner les coordonnées de B.
   Par définition du sinus et du cosinus, B a pour coordonnées :

$$\left(\cos\frac{\pi}{4};\sin\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

3. Calculer IB. On donnera la valeur exacte de IB puis une valeur arrondi au dixième de IB en cm.
   Notons H' le projeté orthogonal de B sur l'axe des abscisses. Alors le triangle $BH'I$ est rectangle en H'.
   Des coordonnées de B on tire $H'B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $OH' = \frac{\sqrt{2}}{2}$. De plus $OI = 1$, et par conséquent $H'I = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc d'après

le théorème de Pythagore on a :

$$\begin{aligned}
& \mathrm{IB}^2 = \mathrm{H'I}^2 + \mathrm{H'B}^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & \mathrm{IB}^2 = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & \mathrm{IB}^2 = 1-\sqrt{2}+\frac{2}{4}+\frac{2}{4} \\
\Longleftrightarrow\quad & \mathrm{IB}^2 = 2-\sqrt{2} \\
\Longleftrightarrow\quad & \mathrm{IB} = \sqrt{2-\sqrt{2}} \simeq 0,77
\end{aligned}$$

On vient de trouver la longueur IB en unité graphique, par conséquent $\mathrm{IB} = 8\sqrt{2-\sqrt{2}} \simeq 6,1$ cm.

4. On note H le point d'intersection entre la droite (OA) et la droite (IB). Quelle est la nature du triangle OHI ?
   On observe que OB = OI = 1, ainsi le triangle OIB est isocèle en O. De plus la droite (OA) est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}};\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$. (OA) est donc aussi une hauteur dans le triangle OIB, et par conséquent :

$$(\mathrm{OA}) \perp (\mathrm{IB}) \Longrightarrow \text{le triangle OIH est rectangle en H.}$$

5. Montrer que $\mathrm{IB} = 2\sin\frac{\pi}{12}$. En déduire la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{8}$.
   Dans le triangle OIH on a :

$$\sin\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}};\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \Longleftrightarrow \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\mathrm{HI}}{\mathrm{OI}} = \mathrm{HI}$$

   Or, $\mathrm{HI} = \frac{1}{2}\mathrm{IB}$ et donc, puisque $\mathrm{IB} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$:

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

6. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$.

$$\begin{aligned}
& \cos^2 x + \sin x = 1 \\
\Longrightarrow\quad & \cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} = 1 \\
\Longleftrightarrow\quad & \cos^2\frac{\pi}{8} + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2 = 1 \\
\Longleftrightarrow\quad & \cos^2\frac{\pi}{8} + \frac{2-\sqrt{2}}{4} = 1 \\
\Longleftrightarrow\quad & \cos^2\frac{\pi}{8} = 1 - \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\
\Longleftrightarrow\quad & \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{4-2+\sqrt{2}}{4} \\
\Longleftrightarrow\quad & \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \\
\Longleftrightarrow\quad & \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \text{ou} \qquad \cos\frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}
\end{aligned}$$

   Or, $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos\frac{\pi}{8} > 0$, on en conclut que :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

7. Donner les coordonnées des points C, D, E, F et G.
D'après les questions précédentes on sait que :

$$A\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$$

Dès coordonnées de A et de la symétrie de la figure on déduit celles de C, D, E, F et G :

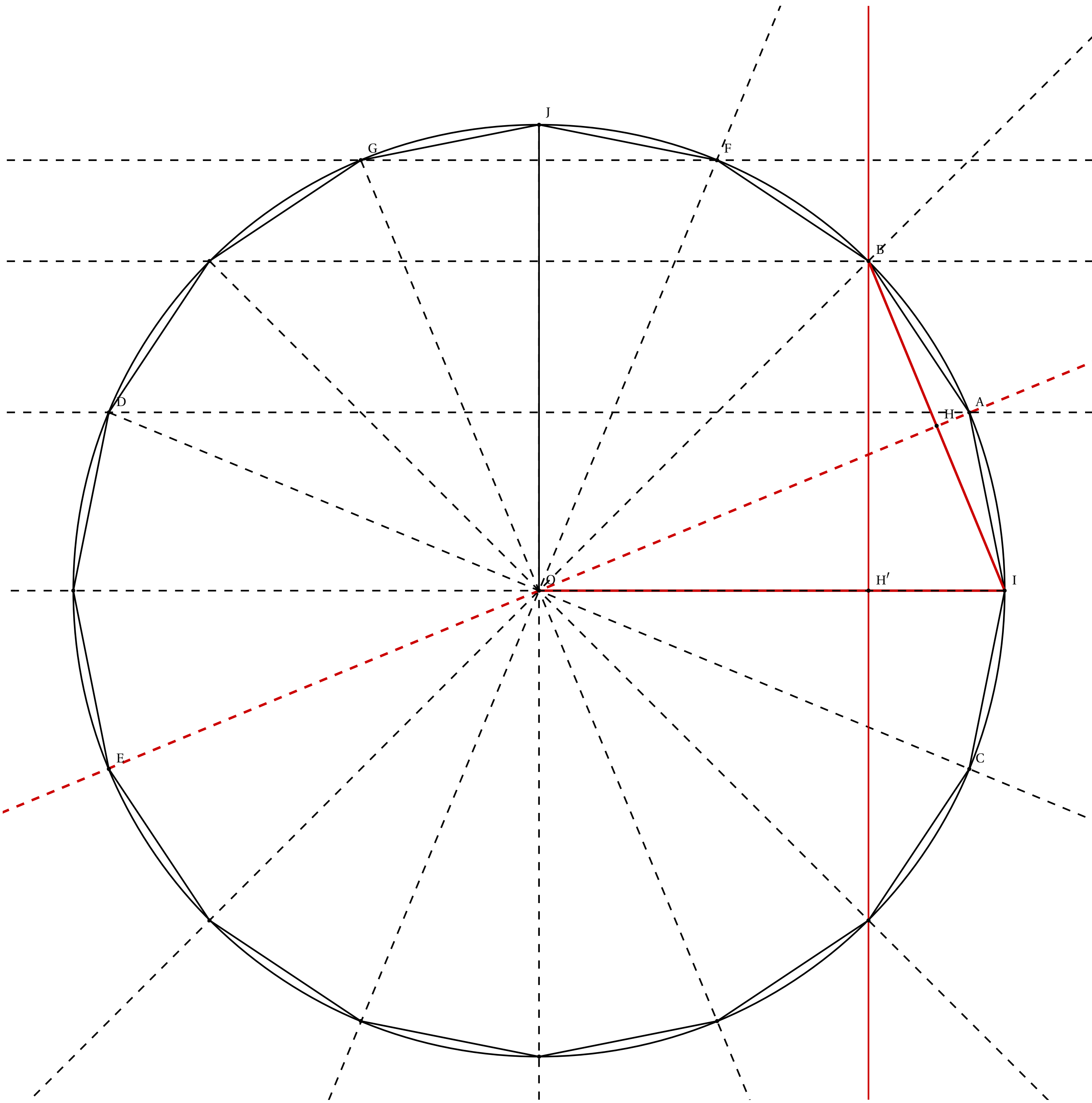
$$C\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$$

$$D\left(\frac{-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$$

$$E\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$$

$$F\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$$

$$G\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$$



Exercice 5. **Question Cactus**

A quelle(s) heure(s) exactement les aiguilles des heures et des minutes d'une montre sont-elles superposées ?