CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 1

Exercice 1. *Les ensembles de nombres* (2 points)

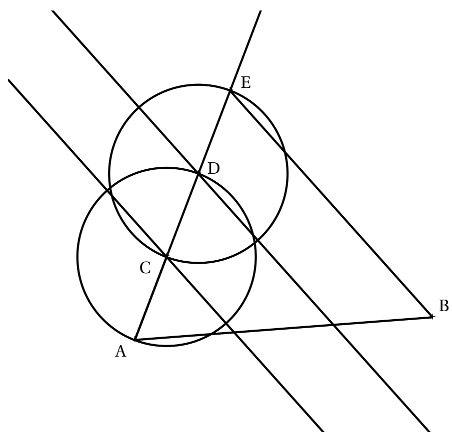
Relier les phrases suivantes :

1. $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels
2. $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels
3. $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels
4. $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des nombres entiers relatifs

Exercice 2. (2 points)

Protocole de construction :

1. Tracer un segment [AB].
2. A l'aide de votre règle (non graduée) et de votre compas, diviser ce segment en trois parties égales.



Exercice 3. *Intervalle* (2 points)

1. A quel intervalle de $\mathbb{R}$, x appartient-il dans chacun des cas suivants :
   (a) $3x-3<5-2x \iff 5x<8 \iff x<\dfrac{8}{5} \iff x\in\left]-\infty;\dfrac{8}{5}\right[$
   (b) $3<-3x+1\leq 7 \iff 2<-3x\leq 6 \iff -\dfrac{2}{3}>x\geq -2 \iff x\in\left[-2;-\dfrac{2}{3}\right[$
2. Dans chacun des cas suivants, traduire par une inégalité le fait que :
   (a) $x\in[1;7[\iff 1\geq x<7$
   (b) $x\in]-1;+\infty[\iff x>-1$

Exercice 4. Résolution d'équation (2 points)

Résoudre les équations suivantes :

1. $3x-7=10 \iff 3x=17 \iff x=\dfrac{17}{3}$

$$\mathscr{S}=\left\{\frac{17}{3}\right\}$$

2. $5x+3=-2x+19 \iff 7x=16 \iff x=\dfrac{16}{7}$

$$\mathscr{S}=\left\{\frac{16}{7}\right\}$$

david.zancanaro@wicky-math.fr.nf
Lycée Jean Durand

3. $(1-x)(2+x)+(1-x)(6-2x)=0 \Longleftrightarrow (1-x)[(2+x)+(6-2x)]=0 \Longleftrightarrow (1-x)(2+x+6-2x)=0 \Longleftrightarrow (1-x)(8-x)=0$
   Dire qu'un produit est nul revient à dire que l'un ou l'autre des facteurs est nul, par conséquent :

$$1-x=0 \quad \text{ou} \quad x-8=0 \Longleftrightarrow x=1 \quad \text{ou} \quad x=8$$

$$\mathscr{S}=\{1;8\}$$

4. $(x+1)^2=(x-1)^2 \Longleftrightarrow x^2+2x+1=x^2-2x+1 \Longleftrightarrow 2x=-2x \Longleftrightarrow 4x=0 \Longleftrightarrow x=0$

$$\mathscr{S}=\{0\}$$

Exercice 5. *Inéquation et problème* (3 points)

1. Résoudre l'inéquation (on donnera l'intervalle auquel appartient le réel x vérifiant) :

$$50+0,42x>40+0,5x \Longleftrightarrow 10>0,08x \Longleftrightarrow \frac{10}{0,08}>x \Longleftrightarrow 125>x$$

   Ainsi $x\in]-\infty;125[$.
2. Voici les tarifs pratiqués par deux agences de location de voitures pour des véhicules identiques (tarifs journaliers, assurance comprise) :
   – AGENCE A : Forfait : 50€ plus 0,42€ par km
   – AGENCE B : Forfait : 40€ plus 0,50€ par km
   Quelle est l'agence la plus avantageuse (du point de vue financier) selon que l'on doit effectuer dans la journée un parcours de

   (a) 50 km ? (b) 150 km ? (c) x km ?

   Pour un total de x km, on paye avec l'agence A : $50+0,42x$ et avec l'agence B $40+0,5x$. Ainsi l'agence B est plus avantageuse que l'agence A si et seulement si $50+0,42x>40+0,5x$ ce qui d'après la première question est vraie pour $x<125$.
   On conclut donc que l'agence B est plus avantageuse pour une distance inférieure à 125 km, moins avantageuse pour une distance supérieure à 125 km et aussi avantageuse que A pour une distance égale à 125 km.

Exercice 6. *Un problème* (2 points)

Un père de trois enfants laisse en héritage 1600 couronnes. Le testament précise que l'aîné doit recevoir 200 couronnes de plus que le deuxième, le deuxième 100 couronnes de plus que le dernier. De quelle somme hérite chacun des enfants ? Notons x l'héritage que reçoit le dernier enfant. Alors, le second reçoit $x+100$, et l'aîné reçoit $x+100+200$, on conclut que :

$$x+x+100+x+100+200=1600 \Longleftrightarrow 3x+400=1600 \Longleftrightarrow 3x=1200 \Longleftrightarrow x=400$$

L'aîné reçoit donc 700 couronnes, le second 500 et le dernier 400.

Exercice 7. *Calcul* (2 points)

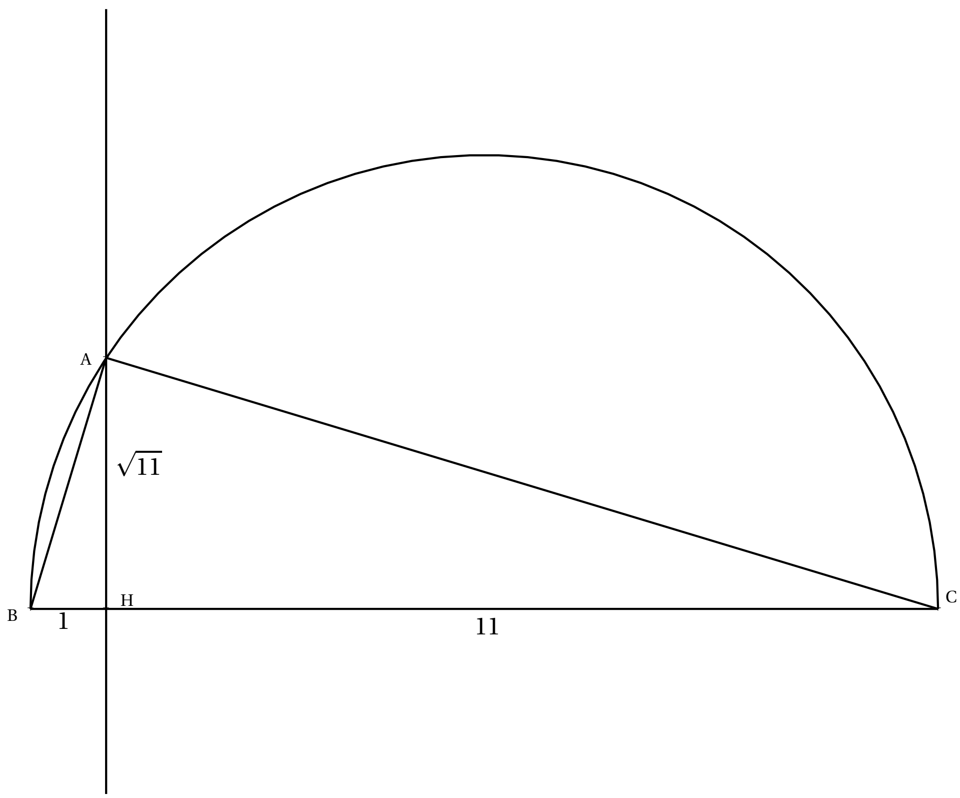
Calculer et mettre sous la forme la plus simple possible :

1. $\dfrac{7+\dfrac{1}{3}}{6-\dfrac{13}{4}} = \dfrac{\dfrac{21+1}{3}}{\dfrac{24-13}{4}} = \dfrac{\dfrac{22}{3}}{\dfrac{11}{4}} = \dfrac{22}{3} \times \dfrac{4}{11} = \dfrac{2\times 11\times 4}{3\times 11} = \dfrac{8}{3}$
2. $\left(\sqrt{3}-4\right)^2 + \sqrt{3}\left(9+\sqrt{3}\right) = 3 - 8\sqrt{3} + 16 + 9\sqrt{3} + 3 = 22 + \sqrt{3}$
3. $\sqrt{72} + \sqrt{36} - 6\sqrt{8} = \sqrt{2\times 36} + 6 - 6\sqrt{4\times 2} = 6\sqrt{2} + 6 - 12\sqrt{2} = -6\sqrt{2} + 6$

Exercice 8. *Géométrie et Racine Carrée* (3 points)

On veut construire à la règle et au compas un segment de longueur : $\sqrt{11}$ cm

1. (a) Construire un segment [BH] de longueur 1 cm.
   (b) Sur la demi-droite [BH), placer le point C tel que HC = 11 cm.
   (c) Construire un demi-cercle de diamètre [BC].
   (d) Construire la droite perpendiculaire à (BC) passant par H. Elle coupe le demi-cercle en A.



2. Expliquer pourquoi le triangle ABC est rectangle en A.
   Le triangle ABC est inscrit dans un cercle dont l'un de ses côtés est un diamètre (le côté [BC]), par conséquent il est rectangle en A.
3. Ecrire l'égalité de Pythagore dans les triangles ABC, AHC et AHB.
   D'après la question le triangle ABC est rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore on a :
   $$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
   Par construction les triangles AHC et AHB sont rectangles en H, ainsi on a d'après Pythagore :
   $$AB^2 = BH^2 + AH^2 \qquad \text{et} \qquad AC^2 = AH^2 + HC^2$$

4. En déduire que $AH^2 = 11$, conclure.

   D'après la question précédente on sait que $BC^2 = AB^2 + AC^2$, en utilisant les deux autres égalités que donnent le théorème de Pythagore on obtient :
   $$BC^2 = HB^2 + AH^2 + AH^2 + HC^2$$
   Ainsi :
   $$BC^2 = 1 + 2AH^2 + 121$$
   Par conséquent :
   $$2AH^2 = 12^2 - 122 = 144 - 122 = 22$$
   On en déduit :
   $$AH^2 = 11 \Longrightarrow AH = \sqrt{11}$$
   Ainsi, à l'aide de la règle et du compas on a construit un segment de longueur $\sqrt{11}$ cm, en l'occurence il s'agit du segment [AH].

Exercice 9. *Le nombre d'or* (2 points)

On considère l'équation suivante : $x^2 – x – 1 = 0$.

Le nombre $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est-il une solution de l'équation ? (détailler les calculs)

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1+2\sqrt{5}+5-2(1+\sqrt{5})-4}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}-2-2\sqrt{5}-4}{4} = 0$$

Ainsi le nombre d'or est bien solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

Exercice 10. *Système* (2 points)

On note J le jour de ta date de naissance. Par exemple, si tu es né le 25 Avril 1982, alors J = 25. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4x + 3y = J \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 3y = J \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 12x + 9y = 3J \\ 12x + 8y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3J \\ 3x + 2y = 0 \Longrightarrow 3x = -6J \Longrightarrow x = -2J \end{cases}$$

Ainsi, si J = 25 alors
$$\mathscr{S} = \{x = -50; y = 75\}$$
De même si J = 13, par exemple :
$$\mathscr{S} = \{x = -26; y = 39\}$$

Exercice 11. **Question Cactus**

Je suis un polygone dont le nombre de diagonales est égal à 13 fois le nombre de côtés.

Combien ai-je de côtés ? **Une solution proposée par J.C, élève de 2nde 8** : En regardant les premiers polygone on s'aperçoit qu'un triangle n'a pas de diagonale, un quadrilatère en a 2, un pentagone en a 5, un hexagone en a 9, ect…

Dans un polygone chaque sommet a une diagonale qui rejoint les autres sommets, sauf, lui-même et les deux sommets avec qui il partage un côté. Ainsi si c désigne le nombre de côté de notre polygone, il y a $c-3$ diagonale par sommet. Mais attention, cela ne se répète pas à chaque sommet, sinon on compte plusieurs fois la même diagonale (deux fois, puisqu'une diagonale relie deux sommets).

Comme il y a c sommet, chaque polygone a donc $(c-3) \times \dfrac{c}{2}$ diagonales, soit $\dfrac{c^2-3c}{2}$. On cherche c tel que :

$$\frac{c^2-3c}{2} = 13c \iff c^2 - 3c = 26c \iff c^2 = 29c \iff c = 29 \qquad \text{puisque } c \neq 0$$

Un polygone à 29 côtés a donc 377 diagonales, c'est-à-dire 13 fois plus de diagonales que de côtés.