CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 1

Exercice 1. (7 points)

PARTIE A. **Fonction affine**

Dans un repère orthonormal $(O;I,J)$, on considère les points $A(-3;1)$ et $B(1;-3)$.

1. Déterminer l'équation de la droite (AB).
   (AB) est une droite dont l'équation est du type :
   $$y = ax + b$$
   A l'aide des coordonnées de A et B, déterminer a et b :
   $$\begin{cases} 1 = -3a + b \\ -3 = a + b \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1 + 3a \\ 4 = -4a \Longrightarrow a = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1 - 3 = -2 \\ a = -1 \end{cases}$$
   Ainsi :
   $$(AB) \quad : \quad y = -x - 2$$

2. Le point $D(2;-4)$ est-il un point de (AB) ?
   $D \in (AB) \iff y_D = -x_D - 2$, or $-2 - 2 = -4$ donc les coordonnées de D vérifient bien l'équation de la droite (AB).
   $$D \in (AB)$$

PARTIE B. **Fonction polynôme de degré 2.**

On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$P(x) = x^2 - x - 6$$
On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le repère orthonormal $(O;I,J)$.

1. Déterminer les antécédents de -6 par P.
   On cherche les réels x tels que $P(x) = -6$.
   $$\begin{aligned} & P(x) = -6 \\ \iff\ & x^2 - x - 6 = -6 \\ \iff\ & x^2 - x = 0 \\ \iff\ & x(x-1) = 0 \\ \iff\ & x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1 \end{aligned}$$
   6 admet deux antécédents par P, 0 et 1.

2. Donner l'équation de l'axe de symétrie de P.
   Puisque P est une fonction polynôme de degré 2, $\mathscr{C}$ est une parabole qui admet un axe de symétrie d'équation :
   $$x = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

3. Déterminer la forme canonique de la fonction P.
   $P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = -\frac{1}{2} - 6 = -\frac{13}{2}$, par conséquent :
   $$P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{2}$$

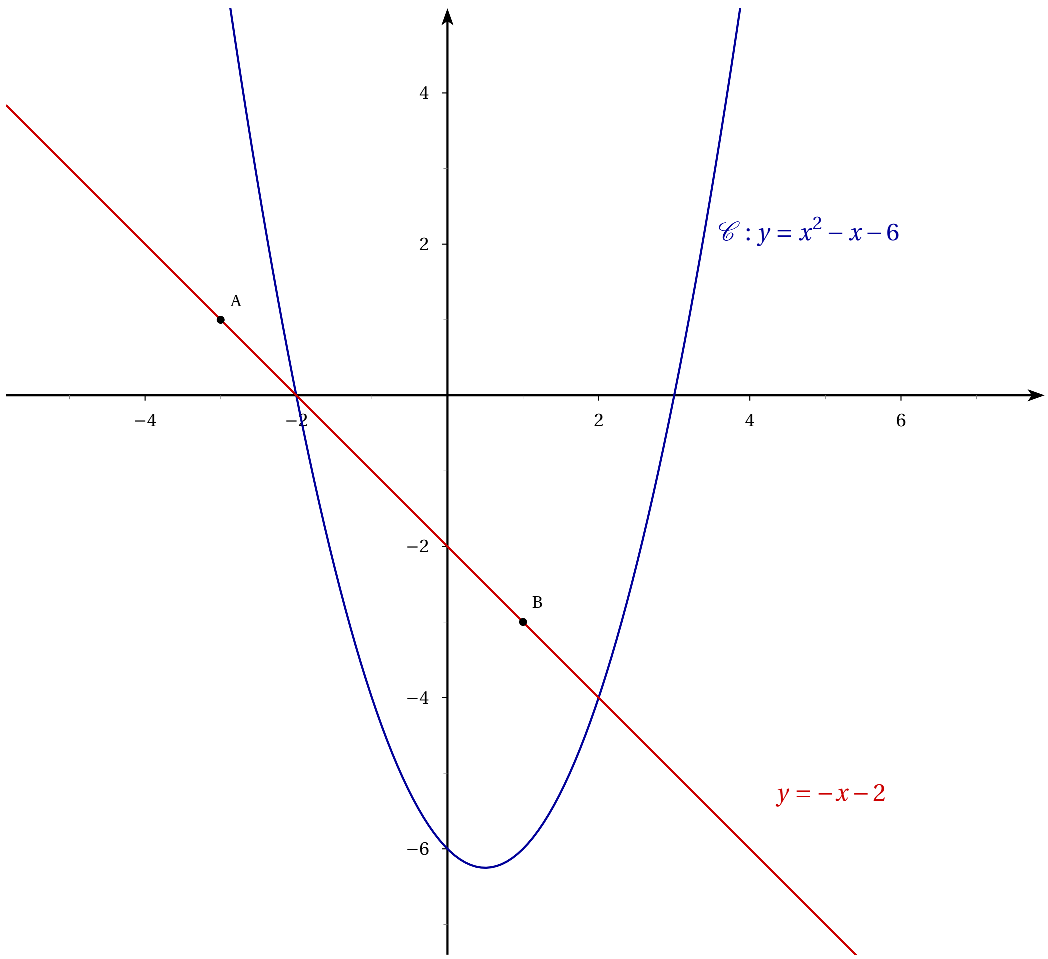
4. Etablir le tableau de variation de P.

D'après la question précédente, comme $P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = 1 > 0$ on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$P(x)$	$\searrow$	$-\frac{13}{2}$	$\nearrow$

PARTIE C. **Représentation graphique et position relative**

1. Représenter dans un même graphique $\mathscr{C}$ et (AB).



2. Déterminer par le calcul l'intervalle sur lequel (AB) est au dessus de $\mathscr{C}$.
Indication : On pourra étudier le signe de $P(x) - (-x-2)$.
$P(x) - (-x-2) = P(x) + x + 2 = x^2 - x - 6 + x + 2 = x^2 - 4$.
(AB) est au dessus de $\mathscr{P}$ dès lors que $P(x) - (-x-2) < 0$, or $x^2 - 4 < 0 \Longleftrightarrow -2 < x < 2$.

$$\mathscr{S} =]-2;2[$$

Lorsque $x = 2$ ou lorsque $x - 2$, $\mathscr{C}$ et (AB) sont confondues.

Exercice 2. (5 points)

La vitesse du son dans l'air, exprimée en km.h^{-1}, en fonction de la température T, exprimée en degré celcius, est donnée par la formule suivante :

$$v(T) = 3,6 \times \sqrt{\frac{11,63(T+273)}{0,029}}$$

1. Rappeler le tableau de variation de la fonction f où f est définie par $f(x) = \sqrt{x}$

x	0 $\quad$ $+\infty$
Variations	$0 \nearrow$

2. A quelle vitesse, à 1 km.h^{-1} près, vole un avion qui franchit le « mur du son », c'est-à-dire lorsque sa vitesse atteint la vitesse du son, à 15° C ?[1]

On calcule $v(15)$:

$$v(15) = 3,6\sqrt{\frac{11,63(15+273)}{0,029}} \simeq 1223 \quad \text{km.h}^{-1}$$

3. (a) Montrer l'implication suivante :

$$-273 \leq t < t' \Longrightarrow v(t) < v(t')$$

On cherche à montrer :

$$-273 \leq t < t' \Longrightarrow v(t) < v(t')$$

$$\begin{aligned}
& -273 \leq t < t' \\
\Longleftrightarrow \quad & 0 \leq t+273 < t'+273 \\
\Longleftrightarrow \quad & 0 \leq 11,63(t+273) < 11,63(t'+273) \\
\Longleftrightarrow \quad & 0 \leq \frac{11,63(t+273)}{0,029} < \frac{11,63(t'+273)}{0,029} \\
\Longleftrightarrow \quad & 0 \leq \sqrt{\frac{11,63(t+273)}{0,029}} < \sqrt{\frac{11,63(t'+273)}{0,029}} \qquad \text{car la fonction } x \longmapsto \sqrt{x} \text{ est strictement croissante sur } [0;+\infty[\\
\Longleftrightarrow \quad & 0 \leq 3,6\sqrt{\frac{11,63(t+273)}{0,029}} < 3,6\sqrt{\frac{11,63(t'+273)}{0,029}} \\
\Longleftrightarrow \quad & 0 \leq v(t) < v(t')
\end{aligned}$$

(b) Qu'a t-on démontré à la question précédente.

Ainsi image et antécédent sont rangés dans le même ordre, la fonction v est strictement croissante sur l'intervalle $[-273;+\infty[$.

(c) En déduire le tableau de variation de la fonction v.

x	-273 $\quad$ $+\infty$
Variations	$0 \nearrow$

4. Un jour d'orage, la température est de 30° C. Sami observe qu'il s'écoule 8 secondes entre l'éclair et le coup de tonnerre. En considérant que la propagation de la lumière est instantannée, à quelle distance de Sami la foudre est-elle tombée ?

On sait que $v = \dfrac{d}{t} \Longleftrightarrow d = v \times t$.

Or,

$$v(30) = 3,6\sqrt{\frac{11,63(30+273)}{0,029}} \simeq 1255 \quad \text{km.h}^{-1} \simeq \frac{1255}{3600} \simeq 0,3486 \quad \text{km.s}^{-1}$$

Ainsi :

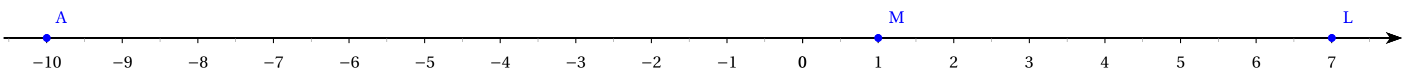
$$d = 0,3486 * 8 \simeq 2,8 \quad km$$

La foudre entendue par Sami est tombée à un peu moins de 3 km.

1. On dit qu'il vole à Mach 1

Exercice 3. (8 points)

Maurice est un homme très jaloux. Amoureux de Gertrude, il ne peut supporter que celle-ci se retrouve trop proche d'Alexandre et de Louis, enfin tout du moins dans des conditions très spéciale. Maurice, Gertrude, Alexandre et Louis vivent dans un monde a une dimension, que nous représentons de la manière suivante :



Ci-dessus A représente la position d'Alexandre, M celle de Maurice et L celle de Louis. Les trois hommes, trop vieux, ne sont plus en capacité de se déplacer.

Plus en forme Gertrude, dont la position est donné par le point G d'abscisse x, est encore capable de se déplacer.

Gertrude, amoureuse cachée de Maurice, a constaté que ce dernier ne souffrait pas du tout dès que les deux conditions suivantes ont lieu en même temps (et qu'il souffrait sinon) :

Condition 1 : GL ≥ GM. *Condition 2 :* GA ≥ 2GM.

Le but du problème est de déterminer les positions où peut se trouver Gertrude sans que Maurice ne souffre.

PARTIE A. **Modélisation du problème**

1. (a) Montrer que Gertrude ne peut pas se trouver en T le point d'abscisse $x = -3$ sans que Maurice ne souffre.
   Dans ce cas on a TM = 4 et TL = 10, ainsi la condition 1 est satisfaite. En revanche TA = 7 et 2TM = 8 donc la condition 2 n'est pas satisfaite et Maurice souffre dès lors que Gertrude va en T.

   (b) Gertrude peut-elle se trouver en T′ le point d'abscisse $x = 3$ sans que Maurice ne souffre ?
   T′M = 2 et T′L = 4, la condition 1 est donc satisfaite. De plus T′A = 13 et 2T′M = 4, par conséquent les deux conditions sont satisfaites, il suit que Gertrude peut se déplacer en T′ sans provoquer la souffrance de Maurice.

2. Exprimer les distances GL, GM et GA en fonction de x en utilisant des valeurs absolues. On a :

$$\mathrm{GL} = d(\mathrm{G};\mathrm{L}) = |x-7| \quad ; \quad \mathrm{GM} = d(\mathrm{G};\mathrm{M}) = |x-1| \quad \text{et} \quad \mathrm{GA} = d(\mathrm{G};\mathrm{A}) = |x-(-10)| = |x+10|$$

PARTIE B. **Etude de fonctions défnies par des valeurs absolues**

On considère les fonctions f, g et h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |7-x| \quad ; \quad g(x) = |x-1| \quad \text{et} \quad h(x) = |x+10|$$

1. Ecrire $f(x)$ sans utiliser les valeurs absolues, en distinguant les cas $x \geq 7$ et $x \leq 7$.

$$f(x) = |7-x| = \begin{cases} 7-x & \text{lorsque} \quad 7-x \geq 0 \\ x-7 & \text{lorsque} \quad 7-x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 7-x & \text{lorsque} \quad x \leq 7 \\ x-7 & \text{lorsque} \quad x \geq 7 \end{cases}$$

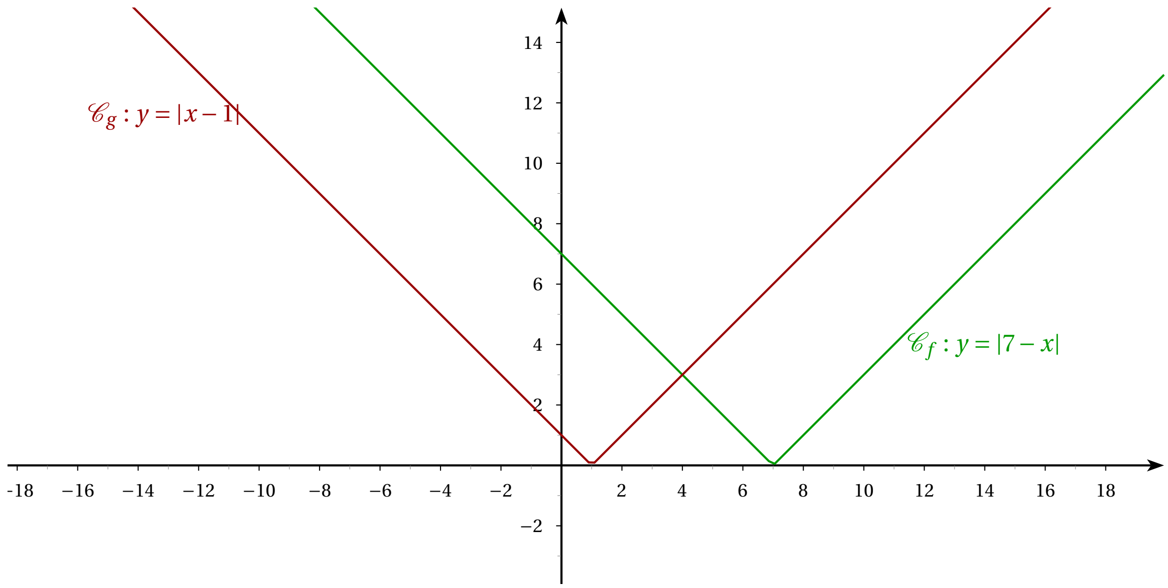
2. Ecrire $g(x)$ sans utiliser les valeurs absolues, en distinguant deux cas.

$$g(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{lorsque} \quad x-1 \geq 0 \\ 1-x & \text{lorsque} \quad x-1 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & \text{lorsque} \quad x \geq 1 \\ 1-x & \text{lorsque} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

3. Ecrire $h(x)$ sans utiliser les valeurs absolues.

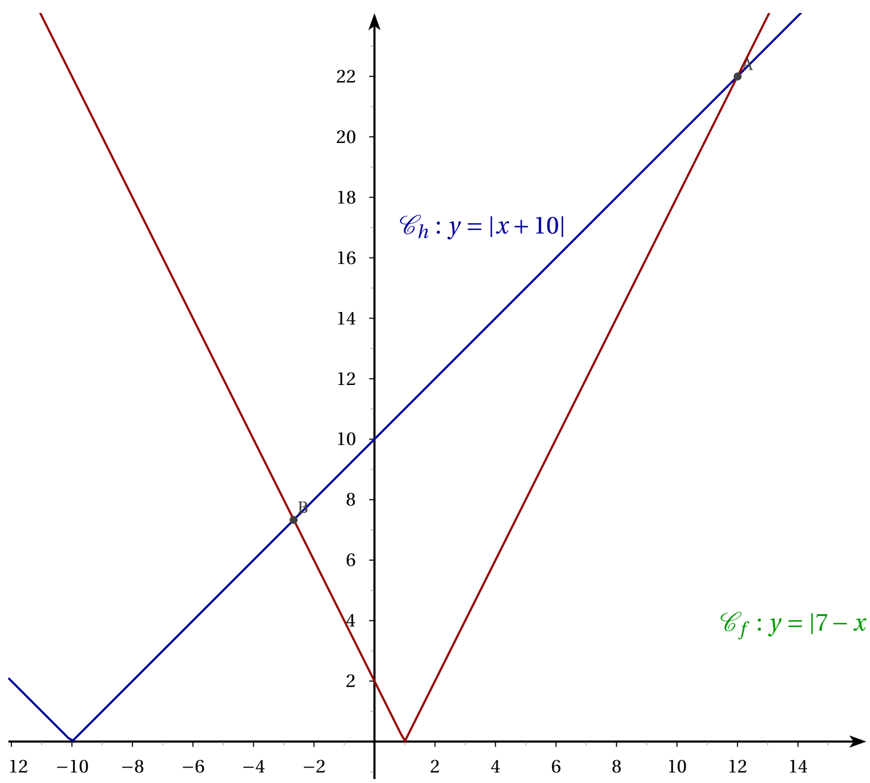
$$h(x) = |x+10| = \begin{cases} x+10 & \text{lorsque} \quad x+10 \geq 0 \\ -x-1 & \text{lorsque} \quad x+10 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x+10 & \text{lorsque} \quad x \geq -10 \\ -x-10 & \text{lorsque} \quad x \leq -10 \end{cases}$$

4. Représenter graphiquement dans un même repère les courbes des fonctions f et g, puis résoudre (graphiquement) l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.



Graphiquement on constate que $f(x) \geq g(x)$ pour $x \leq 4$.

5. Représenter graphiquement dans un même repère les courbes des fonctions h et k où $k(x) = 2|x-1|$, puis résoudre (graphiquement) l'inéquation $h(x) \geq k(x)$.



$\mathscr{C}_h$ est au dessus de $\mathscr{C}_k$ dès lors que $x \in [-2,3;11]$ à l'erreur graphique près.

6. Conclure.
Gertrude doit se trouver entre le point d'abscisse 2,3 et le point d'abscisse 4 pour éviter la souffrance de Maurice :

$$-2,3 \leq x \leq 4$$

PARTIE C. **Résolution du problème de Gertrude par calcul**

1. Résoudre l'inéquation : $|7-x| \geq |x-1|$, en vous servant des résultats de la partie B., dans chacun des cas suivants :

(a) lorsque $x \leq 1$
Lorsque $x \leq 1$, on a $|7-x| = 7-x$ et $|x-1| = 1-x$. Par conséquent on cherche les réels x inférieur à 1 vérifiant :

$$\begin{aligned} & |7-x| \geq |x-1| \\ \iff \quad & 7-x \geq 1-x \\ \iff \quad & 7 \geq 1 \qquad \text{ce qui est toujours vraie} \end{aligned}$$

Ainsi tous les réels à 1 sont tels que $|7-x| \geq |x-1|$.

(b) lorsque $1 \leq x \leq 7$
Lorsque $1 \leq x \leq 7$, on a $|7-x| = 7-x$ et $|x-1| = x-1$. Par conséquent on cherche les réels x compris entre 1 et 7 vérifiant :

$$\begin{aligned} & |7-x| \geq |x-1| \\ \iff \quad & 7-x \geq x-1 \\ \iff \quad & 8 \geq 2x \\ \iff \quad & 4 \geq x \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathscr{S} = [1;4]$$

(c) lorsque $x \geq 7$.
Lorsque $x \geq 7$, on a $|7-x| = x-7$ et $|x-1| = x-1$. Par conséquent on cherche les réels x supérieur à 7 vérifiant :

$$\begin{aligned} & |7-x| \geq |x-1| \\ \iff \quad & x-7 \geq x-1 \\ \iff \quad & -7 \geq -1 \qquad \text{ce qui n'est jamais vraie} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathscr{S} = \emptyset$$

<u>Bilan</u> : $|7-x| \geq |x-1|$ pour $x \in]-\infty;4]$.

2. Résoudre l'inéquation : $|x+10| \geq 2|x-1|$, dans chacun des cas suivants :

(a) lorsque $x \leq -10$
Lorsque $x \leq -10$, on a $|x+10| = -x-10$ et $2|x-1| = -2x+2$. Par conséquent on cherche les réels x inférieur à -10 vérifiant :

$$\begin{aligned} & |x+10| \geq 2|x-1| \\ \iff \quad & -x-10 \geq -2x+2 \\ \iff \quad & x \geq 12 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathscr{S} = \emptyset$$

(b) lorsque $-10 \leq x \leq 1$
Lorsque $-10 \leq x \leq 1$, on a $|x+10| = x+10$ et $2|x-1| = -2x+2$. Par conséquent on cherche les réels x compris entre -10 et 1 vérifiant :

$$\begin{aligned} & |x+10| \geq 2|x-1| \\ \iff \quad & x+10 \geq -2x+2 \\ \iff \quad & 3x \geq -8 \\ \iff \quad & x \geq -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathscr{S} = \left[-\frac{8}{3};1\right]$$

(c) lorsque $x \geq 1$.

Lorsque $x \geq 1$, on a $|x+10| = x+10$ et $2|x-1| = 2x-2$. Par conséquent on cherche les réels x supérieur à 1 vérifiant :

$$\begin{aligned} & |x+10| \geq 2|x-1| \\ \iff & x+10 \geq 2x-2 \\ \iff & 12 \geq x \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathscr{S} = [1;12]$$

<u>Bilan</u> : $|x+10| \geq 2|x-1|$ pour $x \in \left[-\frac{8}{3};12\right]$.

3. Conclure.

On a vu que $|x+10| \geq 2|x-1|$ pour $x \in \left[-\frac{8}{3};12\right]$ et que $|7-x| \geq |x-1|$ pour $x \in]-\infty;4]$, on conclut que :

$$x \in \left[-\frac{8}{3};4\right]$$