CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON 7 : DÉRIVATION

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2+4}$$

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. f est écrite sous la forme $\frac{u}{v}$ donc $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
   On a $u(x) = x$ et donc $u'(x) = 1$, puis $v(x) = x^2+4$ et donc $v'(x) = 2x$, par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = \frac{x^2+4-x(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$$

2. Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction des valeurs de x, puis en déduire les variations de la fonction f.
   Le dénominateur de f est un carré, par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$(x^2+4)^2 > 0$$

   f' est donc du signe du numérateur, qui est un trinôme du second degré.
   Recherchons ses racines en résolvant $-x^2+4 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = -2$ ou $x = 2$.
   On en déduit immédiatement le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

3. Donner, s'ils existent, le minimum et le maximum de f sur $[-4;4]$.
   Par lecture du tableau de variation précédent on déduit immédiatement que f admet $-\frac{1}{4}$ pour minimum sur l'intervalle $[-4;4]$ et $\frac{1}{4}$ pour maximum sur ce même intervalle.

Exercice 2. On considère la fonction h définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 3x^3 + 11x^2 + 5x$$

1. Calculer $h'(x)$, etudier le signe de $h'(x)$ en fonction des valeurs de x puis en déduire le sens de variation de h. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$h'(x) = 9x^2 + 22x + 5$$

   $\Delta = b^2 - 4ac = 304$, le trinôme $9x^2+22x+5$ admet deux racines que voici :

$$x_1 = \frac{-22-\sqrt{304}}{18} \simeq -2,2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-22+\sqrt{304}}{18} \simeq -0,3$$

   Des racines du trinôme on déduit le signe de h' et par conséquent les variations de h comme suit :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\simeq 10,3$	$\searrow$	$\simeq -0,6$	$\nearrow$	$+\infty$

2. En déduire le nombre de solution de l'équation $h(x) = 3$.
Par lecture du tableau de variation précédent l'équation $h(x) = 3$ admet une première solution sur l'intervalle $]-\infty; x_1]$, puis une seconde sur l'intervalle $[x_1; x_2]$ et enfin une troisième sur l'intervalle $[x_2; +\infty[$.

3. A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la plus grande des solutions et les valeurs exactes des autres solutions.
A l'aide de la calculatrice on trouve que les trois solutions que nous notons α, β et γ sont :

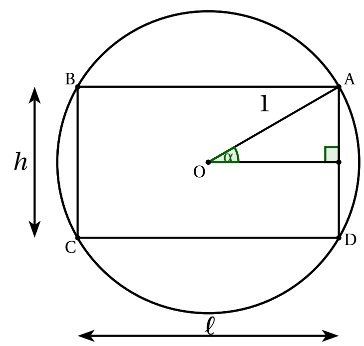
$$\alpha = -3 \qquad ; \qquad \beta = -1 \qquad \text{et la plus grande} \qquad \gamma = \frac{1}{3} \simeq 0,33$$

4. Résoudre l'inéquation $h(x) > 3$.
Par lecture du tableau de variation de h on obtient directement :

$$\mathscr{S} =]-3; -1[\cup \left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$$

Exercice 3.

Dans un tronc d'arbre circulaire, on découpe une poutre de forme parallélépipèdique rectangle. La résistance à la flexion de cette poutre varie comme le produit $\ell \times h^2$ où ℓ et h sont les dimensions ci-contre :
On prend comme unité de longueur le rayon du tronc d'arbre.



1. Montrer que $h^2 = 4 - \ell^2$
Le triangle ABC est rectangle en B, par conséquent, d'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \iff 2^2 = \ell^2 + h^2 \iff h^2 = 4 - \ell^2$$

2. En déduire que $\ell h^2 = -\ell^3 + 4\ell$.
Puisque $h^2 = 4 - \ell^2$, en multipliant membre à membre cette égalité par ℓ on obtient immédiatement :

$$\ell h^2 = -\ell^3 + 4\ell$$

3. Soit $f(x) = -x^3 + 4x$ pour $x \geq 0$.
   (a) Etudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$f'(x) = -3x^2 + 4$$

   Ce trinôme admet deux racines que nous obtenons ne résolvant :

$$-3x^2 + 4 = 0 \iff x^2 = \frac{4}{3} \iff x = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

   Des racines du trinôme on tire successivement le signe de f' et les variations de f :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\simeq -3,1$	$\nearrow$	$\simeq 3,1$	$\searrow$	$-\infty$

Le tableau de variation de f sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$ est donc :

x	0		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\simeq 3,1$	$\searrow$	$-\infty$

(b) Comment choisir ℓ et h pour que la poutre résiste au mieux à la flexion ?

Pour que la poutre résiste au mieux à la flexion il faut, d'après l'énoncé, que le produit ℓh^2 soit maximal, autrement dit il faut que la fonction f soit maximale. D'après le tableau de variation précédent, f est maximale lorsque $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

On choisira ainsi $\ell = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et par conséquent on choisira :

$$h = \sqrt{4-\ell^2} = \sqrt{4-\frac{12}{9}} = \sqrt{4-\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

(c) Quel est l'angle α correspondant à $0,1^\circ$ près.

Dans le triangle rectangle ACD on a :

$$\sin\alpha = \frac{\text{AD}}{\text{AC}} = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{\frac{8}{3}}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{3}}$$

Ce qui implique que

$$\alpha \simeq 54,7^\circ$$

Exercice 4. Un industriel doit fabriquer une boîte fermée de volume 1 dm^3 ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de hauteur y et dont la base est un carré de côté $x > 0$. L'unité de longeur est le décimètre.

1. Justifier que $y = \frac{1}{x^2}$

   Le volume du parallélépipède rectangle vaut 1 donc :

$$x^2 y = 1 \Longleftrightarrow y = \frac{1}{x^2}$$

2. En déduire que l'aire totale de la boîte est :

$$\text{S}(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$$

   Le parallélépipède rectangle est constitué de deux carrés d'aire x^2 et de quatre faces d'aire yx, par conséquent :

$$\text{S}(x) = x^2 + x^2 + 4yx$$

Lycée Jean Durand david.zancanaro@wicky-math.fr.nf

Or, d'après la première question $y = \dfrac{1}{x^2}$, par conséquent :

$$S(x) = 2x^2 + 4 \times \frac{1}{x^2} \times x = 2x^2 + \frac{4}{x}$$

3. Montrer que pour $x > 0$ on a :

$$S'(x) = \frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$$

Pour tout $x > 0$ on a :

$$S'(x) = 4x - \frac{4}{x^2} = \frac{4x^3-4}{x^2} = \frac{4(x^3-1)}{x^2}$$

De plus pour tout $x > 0$, on a :

$$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$$

On a ainsi pour tout $x > 0$:

$$S'(x) = \frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$$

4. (a) Dresser le tableau de signe de S' sur $]0;+\infty[$.

S′ est du signe du numérateur puisque le dénominateur est toujours strictement positif sur $]0;+\infty[$.
Déterminons dans un premier temps les racines de $x^2 + x + 1$:

$$\Delta = 1 - 4 < 0$$

, ce trinôme n'admet pas de racine et par conséquent

$$x^2 + x + 1 > 0$$

Autrement dit S′ est du signe de $x - 1$, d'où :

x	0		1		$+\infty$
$S'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

(b) En déduire le tableau de variation de S sur $]0;+\infty[$.

De la question précédente on déduit immédiatement :

x	0		1		$+\infty$
$S'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$S(x)$	$\Vert$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

(c) Donner les dimensions de la boîte d'aire minimale.

En observant le tableau de variation précédent on s'aperçoit que S admet un minimum lorsque $x = 1$. Ainsi l'aire est minimale lorsque le carré est de côté 1.
De plus si $x = 1$ alors $y = \dfrac{1}{x^2} = 1$. Ainsi la boîte est d'aire minimale lorsque celle-ci est un cube de côté de 1 ; dans ce cas son aire vaut 6 dm^2.