Correction du devoir maison 6 : Suite

Exercice 1. **La suite de Syracuse**

On étudie l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Données:
u est un nombre réel.
p est un nombre entier.

$p := 1$
Entrer u
Tant que $(u \neq 1)$ **Faire**
  Si (u est pair) **Alors**
    $u := \frac{u}{2}$
  Sinon
    $u := 3u + 1$
  Fin Si
  $p := p + 1$
Fin Tant que
Afficher p

PARTIE A. **Comprendre un algorithme**

1. On applique cet algorithme pas à pas avec la valeur $u = 12$ lue en entrée. Reproduire et compléter le tableau suivant :

u	12	6	3	10	5	16	8	4	2	1
p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2. Qu'affiche alors l'algorithme pour $u = 12$?
Il affiche 10.

3. Appliquer également l'algorithme avec $u = 14$ puis $u = 100$.
Pour $u = 14$, comme u est pair on obtient $u = 7$ et $p = 2$, puis $u = 22$ et $p = 3$, puis $u = 11$ et $p = 4$, puis $u = 34$ et $p = 5$, puis $u = 17$ et $p = 6$, puis $u = 52$ et $p = 7$, puis $u = 26$ et $p = 8$, puis $u = 13$ et $p = 9$, puis $u = 40$ et $p = 10$, puis $u = 20$ et $p = 11$, puis $u = 10$ et $p = 12$, puis $u = 5$ et $p = 13$, puis $u = 16$ et $p = 14$, puis $u = 8$ et $p = 15$, puis $u = 4$ et $p = 16$, puis $u = 2$ et $p = 17$, puis $u = 1$ et $p = 18$.
Si l'utilisateur entre $u = 14$ alors l'algorithme affiche 18.
Pour $u = 100$, on obtient pour commencer $u = 50$ et $p = 2$, puis $u = 25$ et $p = 3$, puis $u = 76$ et $p = 4$, puis $u = 38$ et $p = 5$, puis $u = 19$ et $p = 6$, puis $u = 58$ et $p = 7$, puis $u = 29$ et $p = 8$, puis $u = 88$ et $p = 9$, puis $u = 44$ et $p = 10$, puis $u = 22$ et $p = 11$, puis $u = 11$ et $p = 12$, puis $u = 34$ et $p = 13$, puis $u = 17$ et $p = 14$, puis $u = 52$ et $p = 15$, puis $u = 26$ et $p = 16$, puis $u = 13$ et $p = 17$, puis $u = 40$ et $p = 18$, puis $u = 20$ et $p = 19$, puis $u = 10$ et $p = 20$, puis $u = 5$ et $p = 21$, puis $u = 16$ et $p = 22$, puis $u = 8$ et $p = 23$, puis $u = 4$ et $p = 24$, puis $u = 2$ et $p = 25$, puis $u = 1$ et $p = 26$.
Ainsi si on entre $p = 100$ alors l'algorithme affiche 26.

PARTIE B. **Vers la conjecture de Syracuse**

La suite de Syracuse d'un nombre entier N est définie par récurrence, de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 = \mathrm{N} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} \quad \text{lorsque } u_n \quad \text{est pair.} \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \quad \text{lorsque } u_n \quad \text{est impair.} \end{cases}$$

1. Quelle est la suite de syracuse de l'entier N = 12 ? de l'entier N = 14 puis N = 100 ?
D'après la première question la suite de syracuse de l'entier N = 12 est la suite de nombre suivante :

$$12; 6; 3; 10; 5; 16; 8; 4; 2; 1; 4; 2; 1; 4; 2; 1$$

Ici $u_9 = 1$, par conséquent $u_{10} = 4$, $u_{11} = 2$ et $u_{12} = 1$.
La suite de syracuse de l'entier N = 14 est la suite de nombre commençant ainsi :

$$14;7;22;11;34;17;52;26;13;40;20;10;5;16;8;4;2;1;4;2;1;4;2;1$$

Et enfin la suite de syracuse de l'entier N = 100 est la suite de nombre commençant ainsi :

$$100;50;25;76;38;19;58;29;88;44;22;11;34;17;52;26;13;40;20;10;5;16;8;4;2;1;4;2;1$$

On observe qu'au bout d'un certain temps pour chacune des trois suites le cycle $1;4;2;1$ se repète indéfiniment.

2. Selon vous, atteint-on toujours le nombre 1, quelque soit le nombre entier strictement positif N choisit ?
Si l'on était parti d'un autre entier, en lui appliquant les mêmes règles, on aurait obtenu une suite de nombres différente. A priori, il serait possible que la suite de Syracuse de certaines valeurs de départ n'atteigne jamais la valeur 1, soit qu'elle aboutisse à un cycle différent du cycle trivial, soit qu'elle diverge vers l'infini. Or, on n'a jamais trouvé d'exemple de suite obtenue suivant les règles données qui n'aboutisse à 1 et, par suite, au cycle trivial.
La conjecture de Syracuse : La conjecture de Syracuse, encore appelée conjecture de Collatz, conjecture d'Ulam, conjecture tchèque ou problème 3x+1 est l'hypothèse mathématique selon laquelle la suite de Syracuse de n'importe quel entier strictement positif atteint 1.

3. Si vous avez fait de l'erreur de répondre non à la question précédente, trouver un entier N tel que nous n'atteignons jamais 1.
En espérant que les chercheurs ont trouvé un tel exemple afin que nous devenions tous très riche…

Remarque historique :

- En dépit de la simplicité de son énoncé, cette conjecture défie depuis de nombreuses années les mathématiciens. Paul Erdős a dit à propos de la conjecture de Syracuse : « les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes ».
- Cette conjecture mobilisa tant les mathématiciens durant les années 1960, en pleine guerre froide, qu'une plaisanterie courut selon laquelle ce problème faisait partie d'un complot soviétique visant à ralentir la recherche américaine.

PARTIE C. **Temps de vol - vol en altitude**

On donne les deux définitions suivantes :

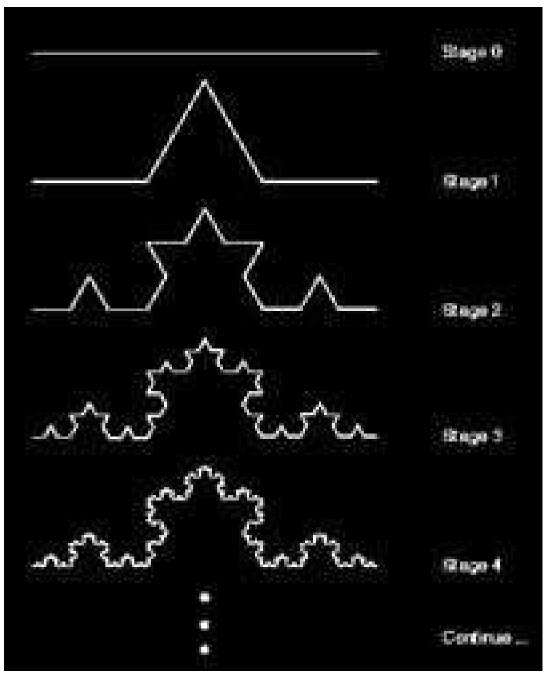
- **Temps de vol** : Il s'agit du plus petit entier n tel que $u_n = 1$.
- **Temps de vol en altitude** : Il s'agit du plus petit entier n tel que $u_n < u_0$.

1. Déterminer le temps de vol de l'entier N = 17, puis de N = 12, N = 14 et enfin de N = 100.
   Ici, $u_0 = 17$, $u_1 = 52$, $u_2 = 26$, $u_3 = 13$, $u_4 = 40$, $u_5 = 20$, $u_6 = 10$, $u_7 = 5$, $u_8 = 16$, $u_9 = 8$, $u_{10} = 4$ et donc $u_{12} = 1$.
   Le temps de vol de 17 est donc 12.
   En exploitant les résultats de la partie A (et en faisant attention à un petit décalage d'indice) on trouve que le temps de vol de 12 est 9, le temps de vol 14 est 17 et enfin celui de 100 est 25.
2. Déterminer le temps de vol en altitude des entiers N = 17, N = 12, N = 14 et enfin N = 100.
   En exploitant les résultats des questions précédentes il vient que le temps de vol en altitude de 17 est 4, celui de 12 est 1, celui de 14 est 1 et celui de 100 est 1.

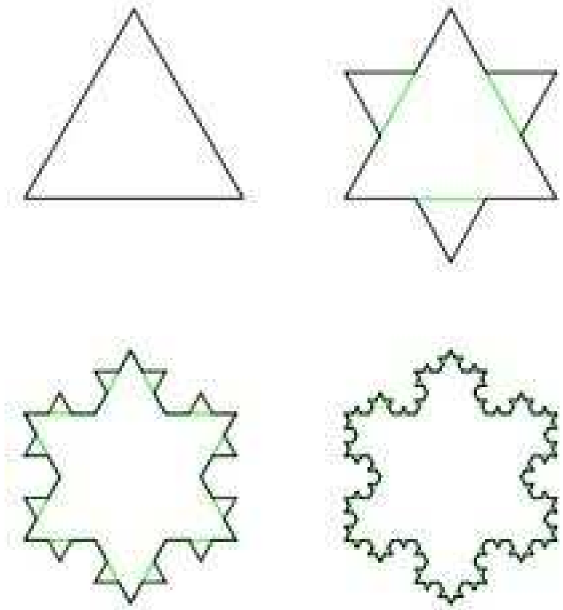
Exercice 2. **Le flocon de Koch**

Le flocon de Koch est une figure géométrique obtenue à partir d'un triangle équilatéral pa réitération d'une transformation appliquée à chaque côté du triangle.

Description de la transformation : Pour chacun des côtés du triangle on effectue la transformation suivante :



Ce qui donne :



PARTIE A. **Etude du nombre de côtés**

Pour tout entier naturel n, $n \geq 0$, on note C_n le nombre de segments qui constituent le flocon à l'étape n (ainsi $C_0 = 3$, $C_1 = 12$).

1. Donner C_2, C_3 et C_4.
   $C_2 = 48$, $C_3 = 192$ et $C_4 = 192 \times 4 = 800 - 32 = 768$.
2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.
   Chaque segment enfante de 4 segments à l'étape suivante, par conséquent :
   $$C_{n+1} = 4 \times C_n$$
3. Vérifier, sur les premiers termes, que $C_n = 3 \times 4^n$.
   $3 \times 4^0 = 3 = C_0$, $3 \times 4 = 12 = C_1$, $3 \times 4^2 = 48 = C_2$ et encore $3 \times 4^3 = 192 = C_3$ et $3 \times 4^4 = 768 = C_4$, la formule semble correcte.
   Il faut encore attendre un peu avant de pouvoir la démontrer…

PARTIE B. **Etude du périmètre**

Pour tout entier naturel n, $n \geq 0$, on note u_n la longueur du segment à l'étape n (ainsi $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{3}$).

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   A chaque étape tout segment se divise en trois segments égaux, par conséquent :
   $$u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n$$
2. Vérifier, sur les premiers termes, que $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$
   $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 = u_0$, $\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3} = u_1$, $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} = u_2$, la formule semble correcte.
   Il faut encore attendre un peu avant de pouvoir la démontrer…
3. Déterminer le périmètre, noté p_n, du flocon à l'étape n.
   Très clairement $p_0 = 3$, $p_1 = 4 \times \frac{1}{3} \times 3 = 4$, $p_2 = C_2 \times u_2 = 3 \times 4^2 \times \frac{1}{9} = \frac{16}{3}$. Et de manière générale, comme à l'étape n il y a C_n segments de longueur u_n, le périmètre p_n vaut :
   $$p_n = C_n \times u_n = 3 \times 4^n \times \frac{1}{3^n} = \frac{4^n}{3^{n-1}} = 4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$
4. Donner la limite de la suite p.
   On conjecture que
   $$\lim_{n \to +\infty} p_n = +\infty$$

Le périmètre du flocon ne cesse de grandir et peut dépasser la taille que l'on veut.

PARTIE C. **Etude de l'aire**

Pour tout entier naturel n, $n \geq 0$, on note a_n l'aire du flocon à l'étape n.

1. Calculer a_0.

   On cherche l'aire d'un triangle équilatéral de côté 1. Calculons la longueur ℓ d'une hauteur, grâce au théorème de Pythagore, on obtient :

   $$1^2 = 0.5^2 + \ell^2 \Longrightarrow \ell = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

   Ainsi

   $$a_0 = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \simeq 0,433$$

2. De l'étape n à l'étape $n+1$, l'aire est augmentée de celle des C_n triangles équilatéraux de côté u_{n+1}.
   En déduire $a_{n+1} - a_n$ en fonction de n.

   De l'étape 0 à l'étape 1, on a augmenté l'aire de $3 = \mathrm{C}_0$ triangle équilatéraux qui ont pour côté $\frac{1}{3} = u_1$, ainsi : $a_1 - a_0$ vaut 3 fois l'aire d'un triangle équilatéral de côté $\frac{1}{3}$.
   De manière générale déterminons l'aire d'un triangle équilatéral de côté c. Commencons par calculer la longueur de la hauteur h :

   $$c^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2 \Longrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

   Ainsi l'aire d'un triangle équilatéral de côté c vaut

   $$\frac{c \times \frac{\sqrt{3}}{2}c}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$

   Il vient que

   $$a_1 - a_0 = \mathrm{C}_0 \times \frac{\sqrt{3}}{4}u_1^2$$

   De manière générale on obtient :

   $$a_{n+1} - a_n = \mathrm{C}_n \times \frac{\sqrt{3}}{4}u_{n+1}^2$$

3. Montrer alors que, pour $n \geq 0$ on a :

   $$a_{n+1} = a_n + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

   Simplifions u_{n+1}^2 dans un premier temps :

   $$u_{n+1}^2 = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]^2 = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^{n+1} = \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}$$

   De la question précédente, pour $n \geq 1$ on tire :

   $$a_{n+1} - a_n = 3 \times 4^n \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} = 3 \times 4^n \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{9} = \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

   On obtient (comme souhaité) :

   $$a_{n+1} = a_n + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

4. Donner de a_2, a_3, a_4 et a_5 arrondie au millième.

   $$a_1 = a_0 + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{4\sqrt{3}}{12} \simeq 0,577$$

   $$a_2 = a_1 + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^1 = \frac{4\sqrt{3}}{12} + \frac{4\sqrt{3}}{12 \times 9} = \frac{10\sqrt{3}}{27} \simeq 0,641$$

puis :

$$a_3 = a_2 + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{10\sqrt{3}}{27} + \frac{4\sqrt{3}}{243} = \frac{94\sqrt{3}}{243} \simeq 0,670$$

puis :

$$a_4 = a_3 + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{94\sqrt{3}}{243} + \frac{16\sqrt{3}}{2187} = \frac{862\sqrt{3}}{2187} \simeq 0,683$$

Et enfin :

$$a_5 = a_4 + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^4 = \frac{862\sqrt{3}}{2187} + \frac{64\sqrt{3}}{19683} = \frac{7822\sqrt{3}}{19783} \simeq 0,688$$

5. **On ne demande aucune justification** : Selon vous, la suite a est-elle convergente ou divergente ?
   On constate que l'aire augmente, mais peu, on peut imaginer que la suite a est convergente, en réalité elle l'est et elle converge vers le réel $\frac{2\sqrt{3}}{5}$.
   Ainsi, « à l'étape $+\infty$ »on obtiendrait une figure qui aurait un bord infini mais une aire finie, c'est une fractale.