CORRECTION DU DEVOIR MAISON 4 : SECOND DEGRÉ ET RÉVISIONS

Exercice 1. **Probabilité et second degré**

On considère une urne contenant trois boules jaunes, deux boules bleues, une boule rouge et m boules vertes. Ces boules sont indiscernables au toucher. On tire, au hasard, une boule de l'urne.

1. Calculer la probabilité des événements suivantes : J = « tirer une boule jaune ». B = « tirer une boule bleue ». R = « tirer une boule rouge ». V = « tirer une boule verte ».

   Dans cette urne, il y a au total $6+m$ boules, par conséquent :

$$p(\mathrm{J}) = \frac{3}{6+m} \qquad p(\mathrm{B}) = \frac{2}{6+m} \qquad p(\mathrm{R}) = \frac{1}{6+m} \qquad \text{et} \qquad p(\mathrm{V}) = \frac{m}{6+m}$$

2. En fonction de la couleur tirée, on se voit attribuer une somme d'argent selon la convention suivante, si la boule tirée est :
   - rouge, on gagne 10 €.
   - verte, on gagne $5m$ €
   - jaune ou bleue, on gagne $-1-2m$ €.

   Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque tirage le gain réalisé.

   (a) Déduire de la question (1) : $p(\mathrm{X}=10)$, $p(\mathrm{X}=-1-2m)$ et $p(\mathrm{X}=5m)$.

   On tire directement de (1) que :

$$p(\mathrm{X}=10) = p(\mathrm{R}) = \frac{1}{6+m} \qquad p(\mathrm{X}=5m) = p(\mathrm{V}) = \frac{m}{6+m} \qquad \text{et} \qquad p(\mathrm{X}=-1-2m) = p(\mathrm{J}) + p(\mathrm{B}) = \frac{5}{6+m}$$

   (b) Calculer m pour que le gain moyen espéré soit de 4,5 €. En déduire dans ce cas l'écart-type $\sigma(\mathrm{X})$.

$$\begin{aligned}
& \mathrm{E(X)} = 4,5 \\
\iff\ & 10 \times \frac{1}{6+m} + 5m \times \frac{m}{6+m} + (-1-2m) \times \frac{5}{6+m} = 4,5 \\
\iff\ & \frac{10+5m^2-5-10m}{6+m} = 4,5 \\
\iff\ & 10+5m^2-5-10m = 4,5(6+m) \\
\iff\ & 5m^2-10m+5 = 27+4,5m \\
\iff\ & 5m^2-14,5m-22 = 0 \\
\iff\ & 10m^2-29m-44 = 0
\end{aligned}$$

   Pour résoudre cette équation on calcule le discriminant :

$$\Delta = b^2-4ac = (-29)^2 - 4\times 10\times(-44) = 841 + 40\times 44 = 841+1760 = 2601 = 51^2$$

   L'équation admet donc deux solutions qui sont :

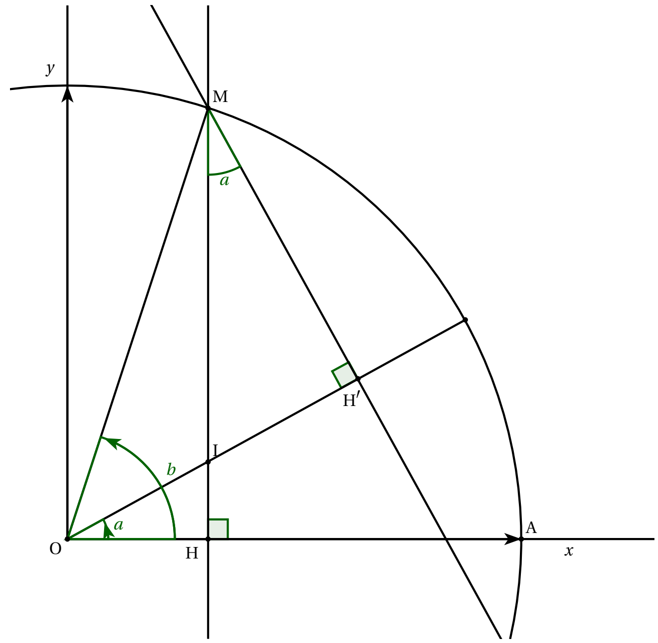
$$m_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{29-51}{20} < 0 \qquad \text{ou} \qquad m_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{29+51}{20} = \frac{80}{20} = 4$$

   L'urne ne peut contenir qu'un nombre entier naturel de boules vertes, par conséquent $\mathrm{E(X)} = 4,5$ lorsque $m = 4$.

Lycée Jean Durand david.zancanaro@wicky-math.fr.nf

Exercice 2. Considérons le dessin suivant, dans laquelle la longueur OA = 1 :

PARTIE A. **Formule trigonométrique**



Dans cette partie, les triangles dans lesquels vous raisonnez devront apparaitre clairement.

1. Montrer que

$$\cos(a+b) = \mathrm{OI}\cos a$$

Dans le triangle rectangle OHM, l'angle $\widehat{\mathrm{OHM}} = a + b$ par conséquent :

$$\cos(a+b) = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OM}} = \frac{\mathrm{OH}}{1} = \mathrm{OH}$$

Dans le triangle rectangle OHI, on applique de nouveau la trigonométrie :

$$\cos a = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OI}} \iff \mathrm{OH} = \mathrm{OI}\cos a$$

On en déduit finalement que :

$$\cos(a+b) = \mathrm{OI}\cos a$$

2. En déduire que :

$$\cos(a+b) = \left(\cos b - \mathrm{IH}'\right)\cos a$$

Dans le triangle rectangle OH′M on a :

$$\cos b = \frac{\mathrm{OH}'}{\mathrm{OM}} = \mathrm{OH}' = \mathrm{OI} + \mathrm{IH}' \iff \mathrm{OI} = \cos b - \mathrm{IH}'$$

On déduit alors de la question précédente que :

$$\cos(a+b) = \mathrm{OI}\cos a = \left(\cos b - \mathrm{IH}'\right)\cos a$$

3. En montrant que $\mathrm{IH}' = \mathrm{MH}'\tan a$ puis que $\mathrm{MH}' = \sin b$, conclure que :

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

Dans le triangle rectangle IH′M on a :

$$\tan a = \frac{\mathrm{IH}'}{\mathrm{MH}'} \iff \mathrm{IH}' = \mathrm{MH}'\tan a$$

Da,s le triangle rectangle OH′M on a :

$$\sin b = \frac{\mathrm{MH}'}{\mathrm{OM}} = \mathrm{MH}'$$

On en déduit que :

$$\mathrm{IH}' = \sin b \tan a = \sin b \tan a$$

Ainsi :

$$\cos(a+b) = \left(\cos b - \mathrm{IH}'\right)\cos a = \cos a \cos b - \mathrm{IH}' \cos a = \cos a \cos b - \sin b \tan a \cos a$$

Comme $\tan a = \dfrac{\sin a}{\cos a}$ on a :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin b \frac{\sin a}{\cos a} \cos a = \cos a \cos b - \sin b \sin a$$

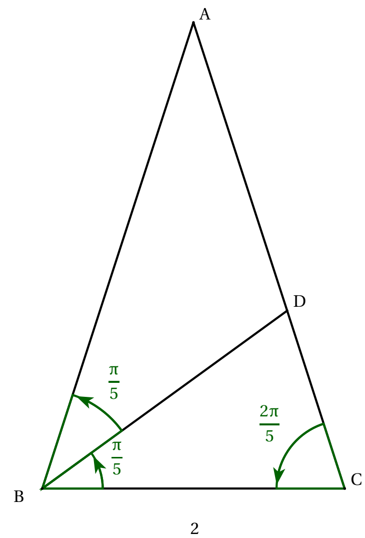
4. En déduire que :

$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$$

Appliquons la formule de la question précédente pour $a = b$ et notons que $\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \iff \sin^2 a = 1 - \cos^2 a$, on obtient :

$$\cos(2a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1-\cos^2 a) = \cos^2 a - 1 + \cos^2 a = 2\cos^2 a - 1$$

PARTIE B. **Triangle d'or**



ABC est un triangle isocèle en A avec BC = 2 et $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)=\frac{2\pi}{5}$ rad. [BD) est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)$ comme représenté ci-dessous.

1. Démontrer que BDC et BDA sont des triangles isocèles, en déduire les longueurs BD et AD.

$$\left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}\right)=\pi-\frac{\pi}{5}-\frac{2\pi}{5}=\frac{5\pi-\pi-2\pi}{5}=\frac{2\pi}{5}$$

Par conséquent le triangle BCA a deux angles égaux, il est donc isocèle.
De même $\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB}\right)=\pi-\frac{2\pi}{5}=\frac{3\pi}{5}$ et donc

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\pi-\frac{\pi}{5}-\frac{3\pi}{5}=\frac{5\pi-\pi-3\pi}{5}=\frac{\pi}{5}$$

Ainsi le triangle BDA a deux angles égaux aussi ce qui prouve qu'il est isocèle.
On en déduit donc que :

$$BD=BC=2 \qquad \text{et} \qquad BD=DA=2$$

2. On trace, dans le triangle ABC, la hauteur issue de A qui coupe [BC] en H puis, dans le triangle BDC, on trace la hauteur issue de B qui coupe [DC] en H′.

   (a) Démontrer que :

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{AB} \qquad \text{et} \qquad DC=4\cos\frac{2\pi}{5}$$

Dans le triangle AHB on a $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{BH}{AB}=\frac{1}{AB}$, de plus dans le triangle BH′C on a

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{H'C}{CB}=\frac{H'C}{2}\iff H'C=2\cos\frac{2\pi}{5}$$

Or :

$$DC=2H'C=2\times 2\cos\frac{2\pi}{5}=4\cos\frac{2\pi}{5}$$

   (b) Démontrer que AB − DC = 2 et en déduire que :

$$4\cos^2\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{2\pi}{5}-1=0$$

On a AB = AC et AC − DC = AD = 2 $\iff$ AB − DC = 2. D'après la question précédente $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{AB}\iff AB=$

$\dfrac{1}{\cos\frac{2\pi}{5}}$ donc :

$$AB - DC = 2 \iff \frac{1}{\cos\frac{2\pi}{5}} - 4\cos\frac{2\pi}{5} = 2 \iff 1 - 4\cos^2\frac{2\pi}{5} = 2\cos\frac{2\pi}{5} \iff 4\cos^2\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{2\pi}{5} - 1 = 0$$

(c) Résoudre l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 16 = 20$ donc l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$ admet les deux solutions suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{20}}{8} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Or, l'équation $4\cos^2\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{2\pi}{5} - 1 = 0 \iff 4x^2 + 2x - 1 = 0$ avec $x = \cos\frac{2\pi}{5}$ donc on obtient :

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \qquad \text{ou} \qquad \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Comme $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ on a $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$ et la seule possibilité restante est donc :

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

(d) Déduire de la **partie A** la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{5}$.

D'après la partie A on a :

$$\cos\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1 \iff \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1$$

On en déduit alors que

$$2\cos^2\frac{\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$$

Et donc, comme $\cos\frac{\pi}{5} > 0$ (l'angle $\frac{\pi}{5}$ rad est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$), que :

$$\cos^2\frac{\pi}{5} = \frac{3+\sqrt{5}}{8} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$$

(e) En déduire les valeurs exactes de $\sin\frac{\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$.

Dans un premier temps remarquons que $\sin\frac{\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$ désignent deux nombres positifs puisque les angles $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$ sont compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.)

On utilise ici la formule valable pour tous réels x :

$$\cos^2 x + \sin^2 = 1 \iff \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

Ce qui donne pour $x = \frac{\pi}{5}$:

$$\sin^2\frac{\pi}{5} = 1 - \frac{3+\sqrt{5}}{8} = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \iff \sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

et pour $x = \frac{2\pi}{5}$:

$$\sin^2\frac{2\pi}{5} = 1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{16} = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{8} = \frac{5+\sqrt{5}}{8} \iff \sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$