Correction Devoir Maison 3 : Le paradoxe de Parrondo

Histoire

Le physicien Juan M.R. Parrondo est l'inventeur du paradoxe du même nom. On trouvera un exposé en anglais sur sa page personnelle. Il s'agit d'un jeu relativement complexe que l'on présente comme une succession de lancers de pièces de monnaies non équilibrées. Il est la combinaison du jeu A, simple lancer d'une pièce n° 1, et du jeu B où on lance soit la pièce n° 2 soit la n° 3 comme décrit dans l'exercice ci-dessous

Exercice 1.

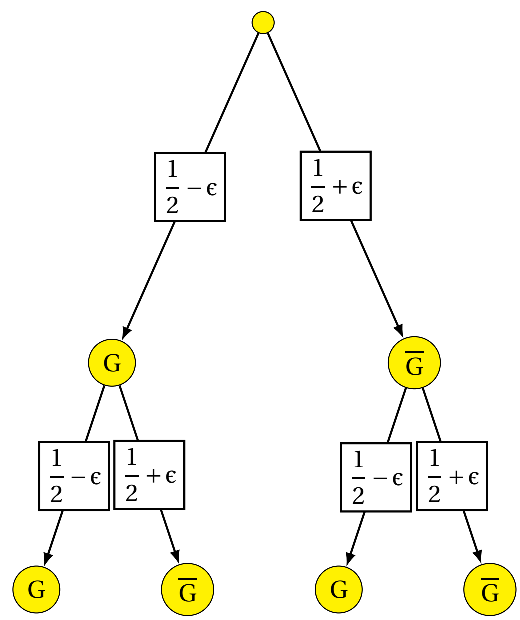
Dans tout l'exercice ϵ désigne un nombre réel tel que $0 < \epsilon < \frac{1}{10}$.

- *Jeu A* : Le joueur lance une pièce de monnaie où Face est gagnante avec la probabilité $p_1 = \frac{1}{2} - \epsilon$, le gain est alors d'un euro. Pile est perdante avec la probabilité $1 - p_1 = \frac{1}{2} + \epsilon$ (gain de -1 euro).
- *Jeu B* : B est un peu plus compliqué, si le capital est multiple de 3, alors Face gagne avec la probabilité $p_3 = \frac{3}{4} - \epsilon$, sinon Face gagne avec la probabilité $p_2 = \frac{1}{10} - \epsilon$

PARTIE A. **Le jeu A**

Un joueur joue deux fois de suite au jeu A. Soit X_a la variable aléatoire donnant le gain d'un joueur lorsqu'il joue au jeu A.

1. Décrire par un arbre pondéré l'univers de cette expérience aléatoire.



2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_a.

La probabilité de gagner deux fois au jeu A est :

$$p(X_a = 2) = \left(\frac{1}{2} - \epsilon\right)^2$$

La probabilité de perdre deux fois au jeu A est :

$$p(X_a = -2) = \left(\frac{1}{2} + \epsilon\right)^2$$

Lycée Jean Durand david.zancanaro@wicky-math.fr.nf

La probabilité de gagner exactement une fois au jeu A est :

$$p(X_a = 0) = \left(\frac{1}{2} - \epsilon\right)\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right)$$

d'où :

X_a	-2	0	2	Total
$p(X_a = x_i)$	$\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}-\epsilon\right)\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)$	$\left(\frac{1}{2}-\epsilon\right)^2$	1

3. Calculer $E(X_a)$. Le jeu est-il avantageux pour le joueur ?

$$E(X_a) = -2\times\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)^2 + 0\times\left(\frac{1}{2}-\epsilon\right)\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right) + 2\times\left(\frac{1}{2}-\epsilon\right)^2 = 2\left(\left(\frac{1}{2}-\epsilon\right)^2 - \left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)^2\right) = 2\left(\frac{1}{4} - \epsilon + \epsilon^2 - \frac{1}{4} - \epsilon - \epsilon^2\right) = -4\epsilon$$

$\epsilon > 0$ donc $-4\epsilon < 0$ donc $E(X_a) < 0$, par conséquent le jeu est désavantageux pour le joueur.

4. Calculer $\sigma(X_a)$ puis interpréter.

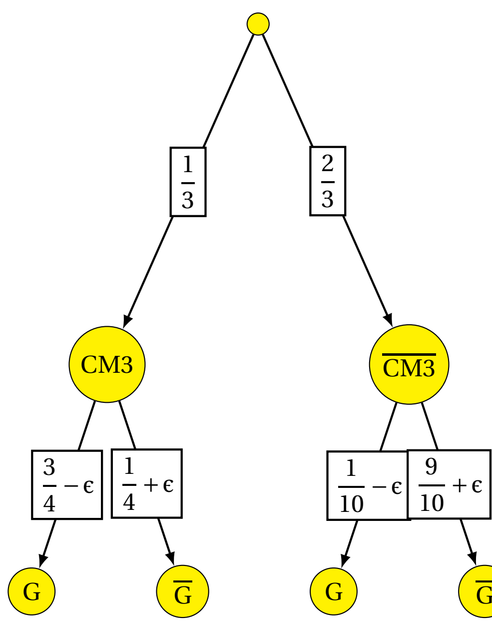
$$\sigma(X_a) = \sqrt{E(X_a^2) - 16\epsilon^2} = \sqrt{4\left(\frac{1}{4} - \epsilon + \epsilon^2 + \frac{1}{4} + \epsilon + \epsilon^2 - 16\epsilon^2\right)} = \sqrt{2 - 8\epsilon^2}$$

ϵ désignant un nombre très proche de 0, l'écart-type est faible, et le jeu n'est pas très risqué pour le joueur.

PARTIE B. **Le jeu B**

Un joueur joue une fois au jeu B. Soit X_b la variable aléatoire donnant le gain d'un joueur lorsqu'il joue au jeu B. On admet qu'il a une chance sur trois d'avoir un capital multiple de 3.

1. Décrire par un arbre pondéré l'univers de cette expérience aléatoire.



2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_b.

La probabilité de gagner une fois au jeu B est :

$$p(X_b = 1) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4} - \epsilon\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{10} - \epsilon\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\epsilon + \frac{2}{30} - \frac{2}{3}\epsilon = \frac{19}{60} - \epsilon$$

La probabilité de perdre une fois au jeu A est :

$$p(X_b = -1) = 1 - p(X_b = 1) = 1 - \frac{19}{60} + \epsilon = \frac{41}{60} + \epsilon$$

d'où :

X_b	-1	1	Total
$p(X_b = x_i)$	$\frac{41}{60}+\epsilon$	$\frac{19}{60}-\epsilon$	1

3. Calculer $E(X_b)$. Le jeu est-il avantageux pour le joueur ?

$$E(X_b) = -\frac{41}{60} - \epsilon + \frac{19}{60} - \epsilon = -\frac{22}{60} - 2\epsilon$$

Comme $\epsilon > 0$ on a $E(X_b) < 0$ et donc le jeu B n'est pas avantageux.

4. Calculer $\sigma(X_b)$ puis interpréter.

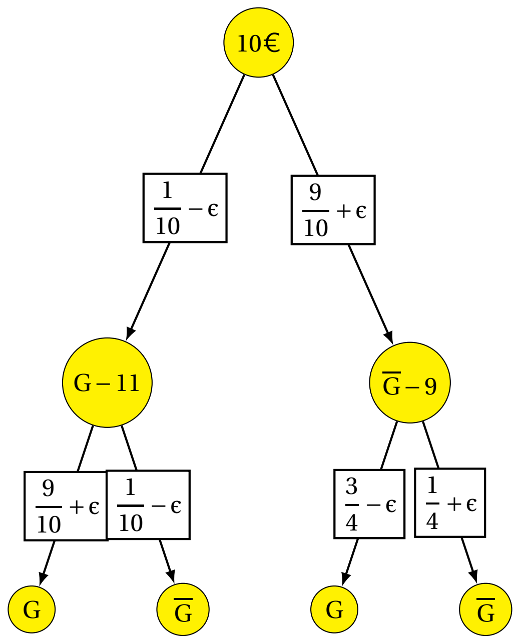
$$\sigma(X_b) = \sqrt{\frac{41}{60} + \epsilon + \frac{19}{60} - \epsilon - \left(-\frac{22}{60} - 2\epsilon\right)^2} = \sqrt{1 - \left(-\frac{22}{60} - 2\epsilon\right)^2}$$

ϵ désignant un nombre très proche de 0, l'écart-type est faible, et la majorité des gains de joueur potentiel à ce jeu se situeront autour de la moyenne.

PARTIE C. Etude du jeu B sur plusieurs parties

Le joueur commence le jeu B avec 10 €. Il joue successivement deux parties au jeu B. On note X_c la variable aléatoire donnant le gain du joueur au terme de deux parties.

1. Décrire par un arbre pondéré l'univers de cette expérience aléatoire.



2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_c.

La probabilité de gagner deux fois au jeu B est :

$$p(X_c = 2) = \left(\frac{1}{10} - \epsilon\right)^2$$

La probabilité de perdre deux fois au jeu B est :

$$p(X_c = -2) = \left(\frac{9}{10} + \epsilon\right)\left(\frac{1}{4} + \epsilon\right)$$

La probabilité de gagner exactement une fois au jeu A est :

$$p(X_c = 0) = \left(\frac{1}{10} - \epsilon\right)\left(\frac{9}{10} + \epsilon\right) + \left(\frac{9}{10} + \epsilon\right)\left(\frac{3}{4} - \epsilon\right)$$

d'où :

X_c	-2	0	2	Total
$p(X_c = x_i)$	$\left(\frac{9}{10}+\epsilon\right)\left(\frac{1}{4}+\epsilon\right)$	$\left(\frac{1}{10}-\epsilon\right)\left(\frac{9}{10}+\epsilon\right)+\left(\frac{9}{10}+\epsilon\right)\left(\frac{3}{4}-\epsilon\right)$	$\left(\frac{1}{10}-\epsilon\right)^2$	1

3. Calculer $E(X_c)$. Le jeu est-il avantageux pour le joueur ?

$$E(X_c) = -2\left(\frac{9}{10}+\epsilon\right)\left(\frac{1}{4}+\epsilon\right)+2\left(\frac{1}{10}-\epsilon\right)^2 = -2\left(\frac{9}{40}+\frac{9}{10}\epsilon+\frac{\epsilon}{4}+\epsilon^2\right)+2\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{5}\epsilon+\epsilon^2\right)$$

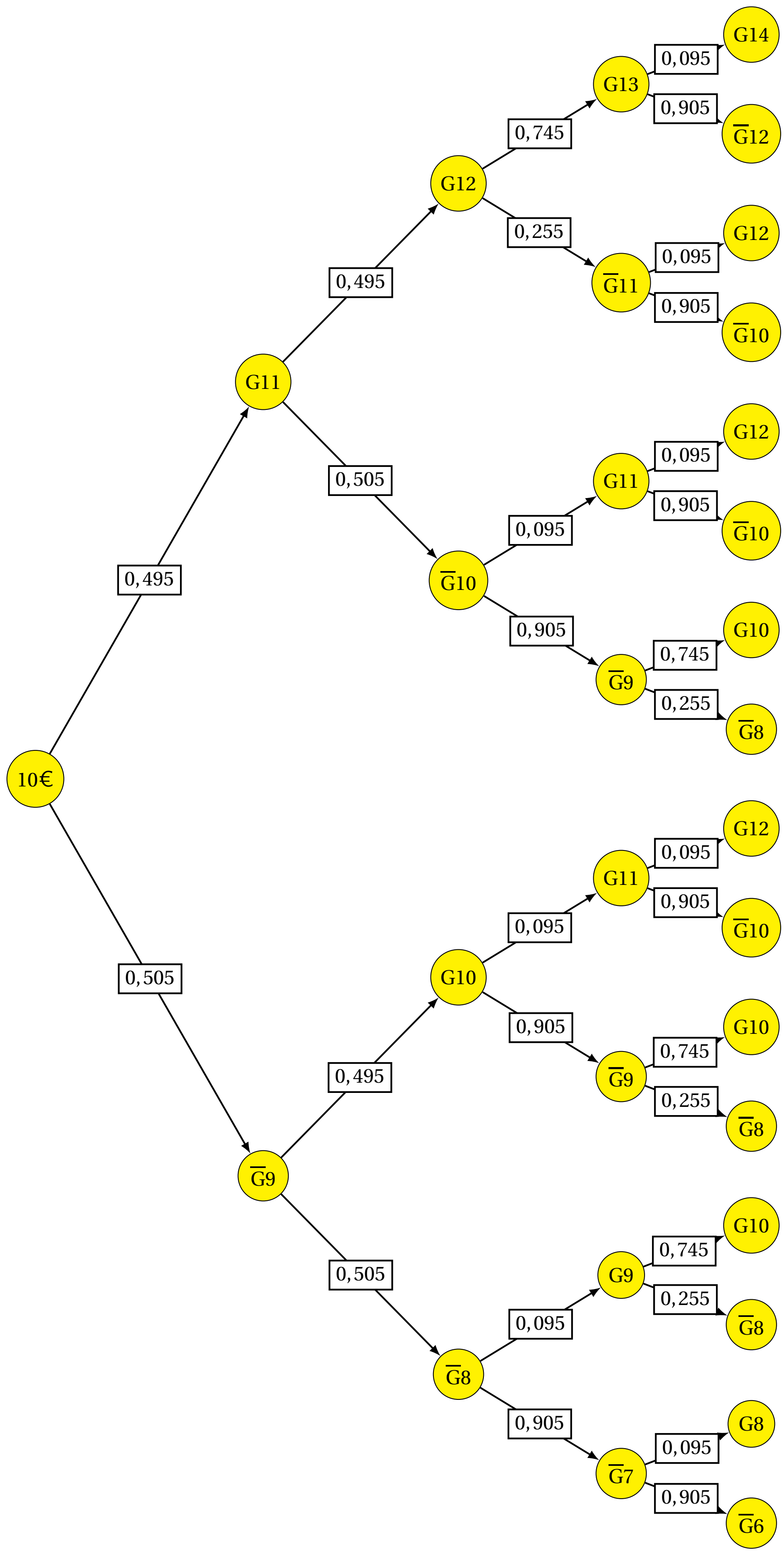
$$E(X_c) = -\frac{9}{20}-1,8\epsilon-0,5\epsilon+\frac{1}{50}-0,4\epsilon = -0,45+0,02-2,7\epsilon = -0,43-2,7\epsilon < 0$$

Jouer deux fois au jeu B est de nouveau désavantageux pour le joueur.

PARTIE D. **Une alternance entre les jeux** A **et** B

Un joueur joue alternativement aux jeux A et B de la manière suivante ; il joue deux fois de suite au jeu A, puis deux fois de suite au jeu B.
Soit X_d la variable aléatoire donnant le gain du joueur lorsqu'il respecte ce protocole.
Dans cette partie $\epsilon = 0,005$. et le joueur commence le jeu avec 10€.

1. Décrire par un arbre pondéré l'univers de cette expérience aléatoire.


10€
0,495
0,505
G11
$\overline{G}$9
0,495
0,505
0,495
0,505
G12
$\overline{G}$10
G10
$\overline{G}$8
0,745
0,255
0,095
0,905
0,095
0,905
0,095
0,905
G13
$\overline{G}$11
G11
$\overline{G}$9
G11
$\overline{G}$9
G9
$\overline{G}$7
0,095
0,905
0,095
0,905
0,095
0,905
0,745
0,255
0,095
0,905
0,745
0,255
0,745
0,255
0,095
0,905
G14
$\overline{G}$12
G12
$\overline{G}$10
G12
$\overline{G}$10
G10
$\overline{G}$8
G12
$\overline{G}$10
G10
$\overline{G}$8
G10
$\overline{G}$8
G8
$\overline{G}$6

2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_d.
La probabilité de gagner 4 fois à ce jeu est :

$$p(X_d = 4) = 0,495 \times 0,495 \times 0,745 \times 0,095 \simeq 0,0173$$

La probabilité de gagner 3 fois à ce jeu est :

$$p(X_d = 2) = 0,495\times0,495\times0,745\times0,905+0,495\times0,495\times0,255\times0,095+0,495\times0,505\times0,095\times0,095+0,505\times0,495\times0,095\times0,095$$

$$p(X_d = 2) \simeq 0,176$$

La probabilité de gagner 1 fois à ce jeu est :

$$p(X_d = -2) = 0,505\times0,505\times0,905\times0,095+0,505\times0,505\times0,095\times0,255+0,505\times0,495\times0,905\times0,255+0,495\times0,505\times0,905\times0,255 \simeq$$

La probabilité de gagner 0 fois à ce jeu est :

$$p(X_d = -4) = 0,505 \times 0,505 \times 0,905 \times 0,905 \simeq 0,209$$

Et enfin la probabilité de gagner 2 fois à ce jeu est :

$$p(X_d = 0) \simeq 1 - 0,0173 - 0,176 - 0,143 - 0,209 \simeq 0,455$$

d'où :

X_d	-4	-2	0	2	4	Total
$p(X_d = x_i)$	$0,209$	$0,143$	$0,455$	$0,176$	$0,0173$	1

3. Calculer $E(X_d)$. Le jeu est-il avantageux pour le joueur ? En quoi ce résultat apparait-il comme paradoxal ?

$$E(X_d) \simeq -4 \times 0,209 - 2 \times 0,143 + 2 \times 0,176 + 4 \times 0,0173 \simeq -0,70$$

L'espérance étant négative, ce résultat n'est en rien paradoxal. L'étude pas suffisament poussée ne permet pas de voir apparaître le paradoxe.