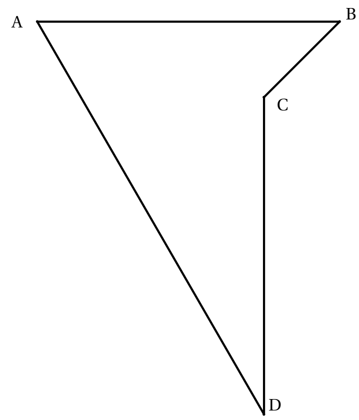
CORRECTION DU DEVOIR MAISON 2

Exercice 1. *Angles de vecteurs*

ABCD est un polygone tel que :

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{\pi}{3}\qquad \left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\pi}{4}\qquad \text{et}\qquad \left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right)=-\frac{\pi}{6}$$

1. Dessiner ce polygone tel que AB = 4 cm et AD = 6 cm.



2. Déterminer des mesures de $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AB}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{CD}\right)$

On utilise les propriétés sur les angles de vecteurs :

$$\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AB}\right)=\left(-\overrightarrow{CB};-\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)=-\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$$

Et de même on a :

$$\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{CD}\right)=\left(-\overrightarrow{AD};-\overrightarrow{CD}\right)=\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right)=-\frac{\pi}{6}\,[2\pi]$$

3. A l'aide de la relation de Chasles, calculer la mesure principale de $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)$

On utilise la relation de Chasles afin de trouver une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)$:

$$\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)=\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)=-\frac{\pi}{4}+\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{CD}\right)=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=-\frac{3\pi+4\pi+2\pi}{12}=-\frac{9\pi}{12}=-\frac{3\pi}{4}$$

De plus $-\pi<-\frac{3\pi}{4}<\pi$, par conséquent le mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)$ est $-\frac{3\pi}{4}$ rad.

Exercice 2. *Equations trigonométriques*

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

(a) $\sin x=\sin\frac{\pi}{4}\iff x=\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$ ou $x=\pi-\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

On conclut que $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ où $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

$$\mathscr{S}=\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi;\frac{3\pi}{4}+2k\pi\qquad\text{avec}\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$$

(b) $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}\iff\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\iff\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Ainsi $x-\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ou $x-\frac{\pi}{2}=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Par conséquent $x=\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+2k\pi=\frac{8\pi}{6}+2k\pi=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+2k\pi=-\frac{2\pi}{6}+2k\pi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

$$\mathscr{S}=\left\{\frac{4\pi}{3}+2k\pi;-\frac{\pi}{3}+2k\pi\qquad\text{avec}\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$$

(c) $\sin 2x = \frac{1}{2} \iff 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Par conséquent : $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, d'où :

$$\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi ; \frac{5\pi}{12} + k\pi \qquad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

i.e :

$$\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{12} + 2k\pi ; \frac{13\pi}{12} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{12} + 2k\pi ; -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \qquad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

(d) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Au final :

$$\mathscr{S} = \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi ; -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2. (a) Montrer que $\cos \frac{\pi}{5} = \sin \frac{3\pi}{10}$.
On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, appliquons cette égalité pour $x = \frac{\pi}{5}$, et on obtient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos \frac{\pi}{5} \iff \sin \frac{3\pi}{10} = \cos \frac{\pi}{5}$$

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique :

$$\cos x = \sin \frac{3\pi}{10}$$

On vient de montrer que $x = \frac{\pi}{5}$ est solution de cette équation, par conséquent :

$$\cos x = \sin \frac{3\pi}{10} \iff \cos x = \cos \frac{\pi}{5} \iff x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{5} + 2k\pi \text{avec} k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{5} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{5} + 2k\pi \qquad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercice 3.
Un élève propose deux « nouvelles »formules à ajouter aux formules trigonométriques classiques :

$$\cos 2a = 2\cos a \tag{1}$$
$$\sin 2a = 2\sin a \tag{2}$$

Ces deux formules sont-elles :

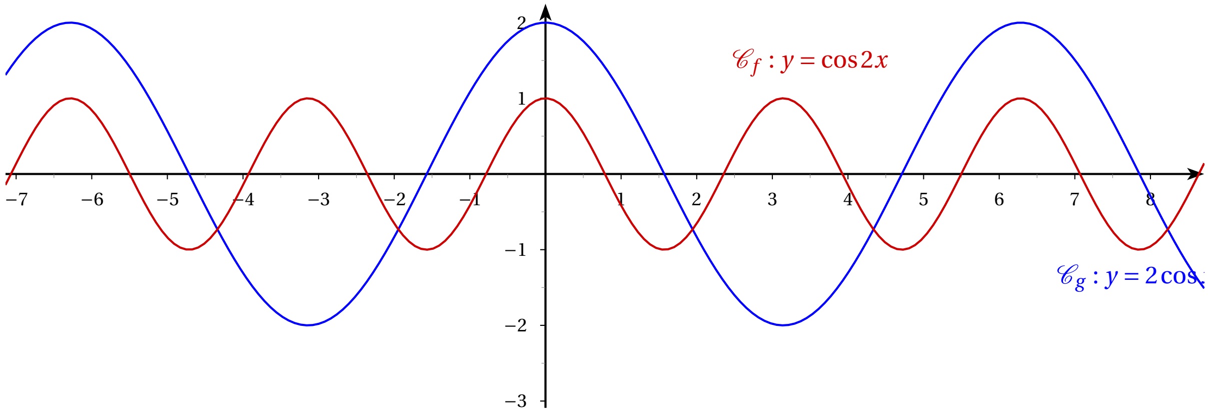
1. vraies pour tout nombre réel a ?
Ces formules ne sont pas vraies pour tout nombre réel a. Prenons l'exemple de $\frac{\pi}{3}$:

$$\cos\left(2 \times \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \neq 2\cos \frac{\pi}{3} = 1$$

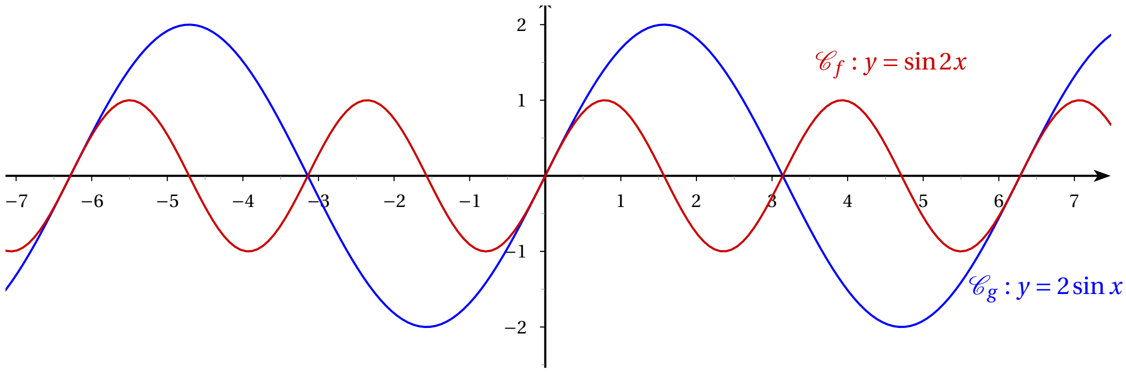
De même :

$$\sin\left(2 \times \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 2\sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

2. vraies pour quelques valeurs de a ? Si oui, lesquelles ?
Il n'existe a priori aucune solution évidente à ce problème. On décide alors de tracer la représentation graphique de la fonction f où $f(x) = \cos 2x$ et de la fonction g où $g(x) = 2\cos x$.



Il existe des points d'intersection entre les deux courbes, par conséquent il existe des valeurs de a telles que $f(a) = g(a)$.
En procédant de la même manière pour la deuxième égalité on observe :



L'égalité a lieu lorsque $2\sin x = 0 \iff \sin x = 0 \iff x = 0 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

3. fausses pour toute valeur de a ?
Les réponses à la question précédente impliquent que les deux formules ne sont pas fausses pour toute valeur de a.

Exercice 4. On se propose de résoudre l'équation (E) :

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \qquad \text{pour} x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

1. (E) admet une « solution évidente ». Laquelle ?
Pour $x = \dfrac{\pi}{4}$ on a :

$$\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Ainsi $\dfrac{\pi}{4}$ est une solution évidente de (E).

2. (a) Soit P le polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{P}(x) = 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$$

Déterminer la forme canonique de P.
On cherche les antécédents de c, donc de 1.

$$\begin{aligned}
& \mathrm{P}(x) = 1 && (3)\\
\iff\ & 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 1 && (4)\\
\iff\ & 2x^2 - 2\sqrt{2}x = 0 && (5)\\
\iff\ & x^2 - \sqrt{2}x = 0 && (6)\\
\iff\ & x(x - \sqrt{2}) = 0 && (7)\\
\iff\ & x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{2} && (8)
\end{aligned}$$

L'équation de l'axe de symétrie de la parabole est donc $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ainsi $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et :

$$\beta = \mathrm{P}(\alpha) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

La forme canonique de P est donc :

$$\mathrm{P}(x) = 2\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

(b) A l'aide de la question précédente déterminer l'antécédent de 0 par P.

$$\begin{aligned} & \mathrm{P}(x) = 0 && (9) \\ \iff \quad & 2\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0 && (10) \\ \iff \quad & \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0 && (11) \\ \iff \quad & x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 && (12) \\ \iff \quad & x = \frac{\sqrt{2}}{2} && (13) \end{aligned}$$

0 n'a qu'un antécédent qui est $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(c) En posant $\mathrm{X} = \cos x$ et $\mathrm{Y} = \sin x$ et ajoutant une équation supplémentaire toujours vérifiée par X et Y, former un système de deux équations à deux inconnues que l'on résoudra (en utilisant le résultat de la question précédente).

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \iff \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 = 1$, par conséquent X et Y vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 = 1 \\ \mathrm{X} + \mathrm{Y} = \sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 = 1 \\ \mathrm{Y} = \sqrt{2} - \mathrm{X} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{X}^2 + (\sqrt{2} - \mathrm{X})^2 = 1 \\ \mathrm{Y} = \sqrt{2} - \mathrm{X} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{X}^2 + 2 - 2\sqrt{2}\mathrm{X} + \mathrm{X}^2 = 1 \\ \mathrm{Y} = \sqrt{2} - \mathrm{X} \end{cases} \iff \begin{cases} 2\mathrm{X}^2 - 2\sqrt{2}\mathrm{X} + 1 = 0 \\ \mathrm{Y} = \sqrt{2} - \mathrm{X} \end{cases}$$

Ainsi $2\mathrm{X}^2 - 2\sqrt{2}\mathrm{X} + 1 = 0 \iff \mathrm{P}(\mathrm{X}) = 0 \iff \mathrm{X} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Par conséquent $\mathrm{Y} = \sqrt{2} - \mathrm{X} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On a déterminé les valeurs de X et Y, d'où :

$$\begin{cases} \mathrm{X} = \cos x \\ \mathrm{Y} = \sin x \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \iff x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S}_{\mathrm{E}} = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercice 5. *Sur les pas de Claude Ptolémée*

A l'aide du théorème de Ptolémée :

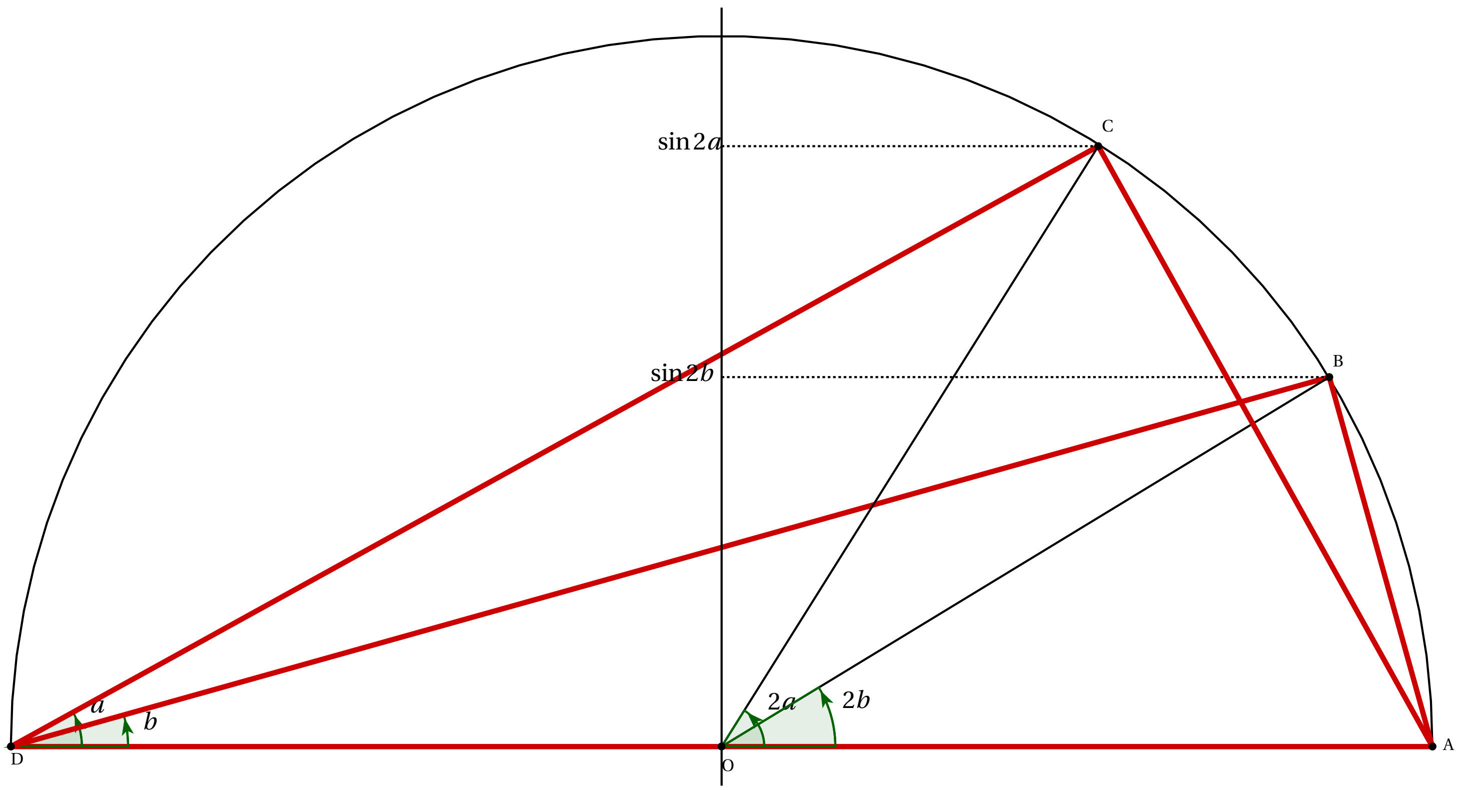
Théorème 1.

Si le quadrilatère convexe ABCD est inscrit dans un cercle, alors :

$$AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD$$

démontrons que : « si $0 < b < a < \frac{\pi}{2}$, alors $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ ».
Sur le demi-cercle de diamètre AD = 1 et de centre O, on place les points B et C tels que :

$$\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right) = a \qquad \text{et} \qquad \left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB}\right) = b$$



1. Déterminer en fonction de $\sin a$, $\sin b$, $\cos a$ et $\cos b$ les longueurs AB, BD, AC et DC.
   Le triangle ABD est rectangle en B, par conséquent :
   $$\sin b = \frac{AB}{AD} = AB \qquad \text{et} \qquad \cos b = \frac{BD}{AD} = BD$$
   De la même manière le triangle ACD est rectangle en C, par conséquent :
   $$\sin a = \frac{AC}{AD} = AC \qquad \text{et} \qquad \cos a = \frac{DC}{AD} = DC$$
2. Montrer que
   $$\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right) = 2a - 2b$$
   D'après le théorème de l'angle au centre dans un cercle on a :
   $$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) = 2 \times \left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB}\right) = 2b \quad ; \quad \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right) = 2 \times \left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right) = 2a$$

Lycée Jean Durand david.zancanaro@wicky-math.fr.nf

On en déduit, en utilisant la relation de Chasles que :

$$\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)=\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)=-\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)=-2b+2a=2a-2b$$

En déduire que BC $=\sin(a-b)$.

Dans le triangle OBC isocèle en O, on considère la hauteur issue de O qui est aussi médiane et bissectrice dans le triangle OBC. Notons I le milieu de [BC].

Dans le triangle rectangle OIB on a :

$$\sin\left(\frac{2a-2b}{2}\right)=\frac{\text{IB}}{\text{OB}}\iff\sin(a-b)=\frac{\frac{1}{2}\text{BC}}{\frac{1}{2}}\iff\sin(a-b)=\text{BC}$$

3. Conclure à l'aide du théorème de Ptolémée.
D'après le théorème de Ptolémée on a, dans le cas où $0<b<a<\frac{\pi}{2}$ alors ABCD est un quadrilatère convexe donc :

$$\text{AB}\times\text{CD}+\text{BC}\times\text{AD}=\text{AC}\times\text{BD}\iff\sin b\times\cos a+\sin(a-b)\times 1=\sin a\times\cos b\iff\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$$

Exercice 6. *Problème ouvert : un escargot se déplace.*

Un escargot se déplace dans un potager rectangulaire de dimensions 3 m ×4 m.
Un repère orthonormé (O;I,J) est tracé sur le sol tel que :

- O est le centre du potager ;
- $\overrightarrow{OI}$ a pour direction la longueur du potager ;
- le plan est orienté.

L'escargot par de O et avance à la vitesse de 6 cm.min^{-1} en suivant l'axe des abscisses dans le sens positif pendant 1 minute, puis tourne d'un angle de $\frac{\pi}{45}$. Il poursuit son chemin pendant 1 minute, tourne encore et ainsi de suite.

Arrivera-t-il sur une des clôtures en moins de 2 heures ? Voici ici un dessin représentant le déplacement de notre escargot dans un potager rectangulaire. On s'aperçoit graphiquement qu'il va sortir du potager en moins d'une demi-heure.