CORRECTION DU DEVOIR MAISON 1

Exercice 1.
On définit pour chaque couple de réels $(a;b)$ la fonction f par :

$$f(x) = a - \sqrt{x+b}$$

Deux nombres réels u et v sont dits ÉCHANGEABLES s'il existe au moins un couple de réels $(a;b)$ tel que la fonction f vérifie à la fois $f(u) = v$ et $f(v) = u$.

1. Montrer que 2 et 3 sont échangeables.
   On cherche s'il existe deux réels a et b tels que :

$$\begin{cases} f(2) = 3 \\ f(3) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a - \sqrt{2+b} = 3 \\ a - \sqrt{3+b} = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{2+b} = a-3 \\ \sqrt{3+b} = a-2 \end{cases}$$

   Dans un premier temps on constate du fait de la présence de la racine carrée que $2+b \geq 0 \iff b \geq -2$ et $3+b \geq 0 \iff b \geq -3$ et de même puisque une racine est toujours positive on a aussi $a \geq 3$ et $a \geq 2$. Ainsi on est sûr que :

$$b \geq -2 \qquad \text{et} \qquad a \geq 3$$

   Elevons le tout au carré :

$$\begin{cases} 2+b = a^2-6a+9 \\ 3+b = a^2-4a+4 \end{cases} \iff \begin{cases} b = a^2-6a+7 \\ b = a^2-4a+1 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2-6a+7 = a^2-4a+1 \\ b = a^2-4a+1 \end{cases} \iff \begin{cases} 6 = 2a \Longrightarrow a = 3 \\ b = a^2-4a+1 = 9-12+1 = -2 \end{cases}$$

   Vérification : Si $a = 3$ et $b = -2$ on a :

$$f(2) = 3 - \sqrt{2-2} = 3 \qquad \text{et} \qquad f(3) = 3 - \sqrt{3-2} = 3-1 = 2$$

   On a donc trouvé un couple de réels $(a;b)$ tels que $f(2) = 3$ et $f(3) = 2$ ce qui signifie que 2 et 3 sont échangeables.

2. Peut-on en dire autant de 4 et 7 ?
   Probablement qu'on ne peut pas en dire autant de 4 et 7, mais procédons à l'identique pour s'en assurer…
   On cherche s'il existe deux réels a et b tels que :

$$\begin{cases} f(4) = 7 \\ f(7) = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a - \sqrt{4+b} = 7 \\ a - \sqrt{7+b} = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{4+b} = a-7 \\ \sqrt{7+b} = a-4 \end{cases}$$

   Dans un premier temps on constate du fait de la présence de la racine carrée que $4+b \geq 0 \iff b \geq -4$ et $7+b \geq 0 \iff b \geq -7$ et de même puisque une racine est toujours positive on a aussi $a \geq 4$ et $a \geq 7$. Ainsi on est sûr que les entiers cherchés sont tels que :

$$b \geq -4 \qquad \text{et} \qquad a \geq 7$$

   Elevons le tout au carré :

$$\begin{cases} 4+b = a^2-14a+49 \\ 7+b = a^2-8a+16 \end{cases} \iff \begin{cases} b = a^2-14a+45 \\ b = a^2-8a+9 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2-14a+45 = a^2-8a+9 \\ b = a^2-8a+9 \end{cases} \iff \begin{cases} 36 = 6a \Longrightarrow a = 6 \\ b = a^2-8a+9 = 36-48+9 = -3 \end{cases}$$

   a ne peut pas être égal à 6 (puisqu'il ne peut être que supérieur ou égal à 7), il vient qu'il n'existe pas de couple d'entiers $(a;b)$ tels que $f(4) = 7$ et $f(7) = 4$ et donc que 4 et 7 ne sont pas échangeables.

3. A quelle condition deux **entiers** u et v sont-ils échangeables ?
   Les deux premières questions amènent à conjecturer que :
   Deux entiers u et v sont échangeables si et seulement si $u = v$ ou si u et v sont consécutifs.
   Si $u = v$, alors u et u sont échangeables si et seulement si il existe un couple de réels $(a;b)$ tels que $f(u) = u$.
   Or, en choisissant $a = u$ et $b = -u$, on a :

$$f(u) = u - \sqrt{u-u} = u$$

   Ainsi tout nombre entier u est échangeable avec lui-même.
   Supposons désormais que $u \neq v$ et notons u le plus grand des deux entiers.

On cherche s'il existe deux réels a et b tels que :

$$\begin{cases} f(u)=v \\ f(v)=u \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a-\sqrt{u+b}=v \\ a-\sqrt{v+b}=u \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{u+b}=a-v \\ \sqrt{v+b}=a-u \end{cases}$$

Dans un premier temps on constate du fait de la présence de la racine carrée que $u+b \geq 0 \Longleftrightarrow b \geq -u$ et $v+b \geq 0 \Longleftrightarrow b \geq -v$ et de même puisque une racine est toujours positive on a aussi $a \geq u$ et $a \geq v$. Ainsi on est sûr que les entiers cherchés sont tels que :

$$b \geq -v \qquad \text{et} \qquad a \geq u$$

Elevons le tout au carré :

$$\begin{cases} u+b=a^2-2av+v^2 \\ v+b=a^2-2au+u^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b=a^2-2av+v^2-u \\ b=a^2-2au+u^2-v \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -2av+v^2-u=-2au+u^2-v \\ b=a^2-2au+u^2-v \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{u^2-v^2+u-v}{2u-2v} \\ b=a^2-2au+u^2-v \end{cases}$$

Simplifions l'expression de a :

$$a=\frac{u^2-v^2+u-v}{2u-2v}=\frac{(u-v)(u+v)+u-v}{2u-2v}=\frac{(u-v)(u+v+1)}{2u-2v}=\frac{u+v+1}{2}$$

De plus on sait que $a \geq u$ et :

$$a \geq u \Longleftrightarrow \frac{u+v+1}{2} \geq u \Longleftrightarrow u+v+1 \geq 2u \Longleftrightarrow v+1 \geq u$$

Or u et v sont deux entiers avec $v<u$ et $v+1 \geq u$, nous avons donc démontré que deux entiers (différents) et non consécutifs ne sont pas échangeables.
De plus si $u=v+1$, alors $a=\dfrac{v+1+v+1}{2}=v+1$ et $b=(v+1)^2-2(v+1)^2+(v+1)^2-v=-v$. (on a bien $a \geq u$ et $b \geq -v$) donc les deux réels conviennent, ainsi deux entiers consécutifs sont échangeables, et la fonction permettant l'échange est définie par :

$$f(x)=v+1-\sqrt{x-v}$$

<u>Exercice</u> 2.
Le plan est rapporté au repère orthonormal $(\mathrm{O},\mathrm{I},\mathrm{J})$. Soit un point $\mathrm{A}(a;0)$, avec $a \geq 0$, situé sur l'axe des absisses.
On construit successivement :

- les points $\mathrm{B}(a-1;0)$ et $\mathrm{C}(2a;0)$;
- la droite d perpendiculaire à (BC), passant par A ;
- $\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre [BC].
- le point M, d'ordonnée positive, situé à l'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et de la droite d.

1. Construire une première figure pour $a=2$, puis une seconde pour $a=4$.

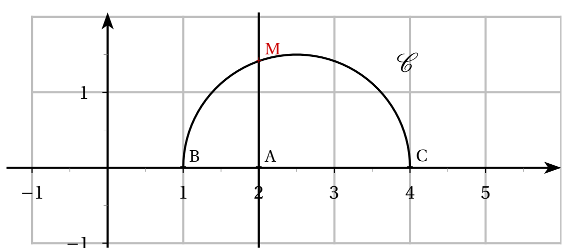

Figure pour $a=2$.

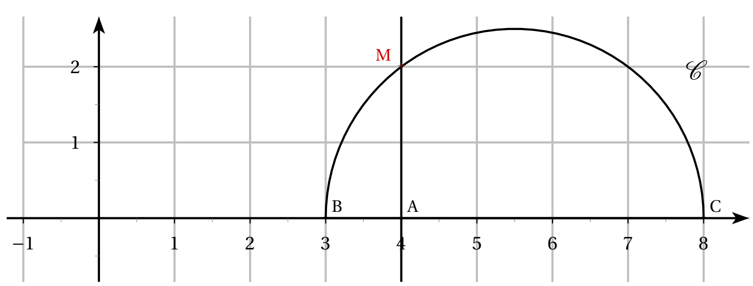

Figure pour $a=4$.

2. Montrer que le lieu $\mathscr{L}$ des points M quand A se déplace le long de l'axe des abscisses est la représentation graphique d'une fonction de référence que l'on déterminera.

L'ordonnée de M obtenue pour $a=2$ est (graphiquement) environ 1,4 et pour $a=4$ est (graphiquement) environ 2.
Conjecture : L'ordonnée de M est $\sqrt{a}$. Démontrons le.
Notons y l'ordonnée de M, on cherche à montrer que $y=\sqrt{a}$.
On a $\mathrm{M}(a;y)$.
Nommons O le centre du cercle $\mathscr{C}$. Alors O a pour coordonnées (étant le milieu de [BC]) :

$$\mathrm{O}\left(\frac{x_\mathrm{B}+x_\mathrm{C}}{2};\frac{y_\mathrm{B}+y_\mathrm{C}}{2}\right)\Longleftrightarrow \mathrm{O}\left(\frac{a-1+2a}{2};0\right)\Longleftrightarrow \mathrm{O}\left(\frac{3a-1}{2};0\right)$$

OM est un rayon du cercle $\mathscr{C}$, ainsi on a :

$$\begin{aligned}
& \mathrm{OM}=\frac{\mathrm{BC}}{2}\\
\Longleftrightarrow\quad & \sqrt{\left(a-\frac{3a-1}{2}\right)^2+(y-0)^2}=\frac{\sqrt{(2a-a+1)^2+0^2}}{2}\\
\Longleftrightarrow\quad & \left(\frac{2a}{2}-\frac{3a-1}{2}\right)^2+y^2=\frac{(a+1)^2}{4}\\
\Longleftrightarrow\quad & \left(\frac{2a-3a+1}{2}\right)^2+y^2=\frac{(a+1)^2}{4}\\
\Longleftrightarrow\quad & \frac{(1-a)^2}{4}+y^2=\frac{(a+1)^2}{4}\Longleftrightarrow y^2=\frac{(a+1)^2-(1-a)^2}{4}\\
\Longleftrightarrow\quad & y^2=\frac{a^2+2a+1-(1-2a+a^2)}{4}=\frac{a^2+2a+1-1+2a-a^2}{4}\\
\Longleftrightarrow\quad & y^2=\frac{4a}{4}=a\\
\Longleftrightarrow\quad & y=\sqrt{a}
\end{aligned}$$

Le lieu $\mathscr{L}$ des points M quand A se déplace le long de l'axe des abscisses est la représentation graphique de la fonction racine carrée.

Exercice 3.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=|x+3|-|2-x|$$

1. Ecrire, en fonction des valeurs de x, l'expression de $f(x)$ sans utiliser de valeurs absolues.

$$|x+3|=\begin{cases} x+3 & \text{lorsque} \quad x\geq -3\\ -x-3 & \text{lorsque} \quad x\leq -3\end{cases}$$

De même :

$$|2-x|=\begin{cases} 2-x & \text{lorsque} \quad 2-x\geq 0\\ -2+x & \text{lorsque} \quad 2-x\leq 0\end{cases}=\begin{cases} 2-x & \text{lorsque} \quad x\leq 2\\ -2+x & \text{lorsque} \quad x\geq 2\end{cases}$$

Nous distinguons ainsi 3 cas :

– lorsque $x\leq -3$, $|x+3|=-x-3$ et $|2-x|=2-x$, par conséquent :

$$f(x)=-x-3-(2-x)=-x-3-2+x=-5 \qquad \text{lorsque } x\leq -3$$

– lorsque $-3\leq x\leq 2$, $|x+3|=x+3$ et $|2-x|=2-x$, par conséquent :

$$f(x)=x+3-(2-x)=x+3-2+x=2x-1 \qquad \text{lorsque } -3\leq x\leq 2$$

– lorsque $x\geq 2$, $|x+3|=x+3$ et $|2-x|=-2+x$, par conséquent :

$$f(x)=x+3-(-2+x)=x+3+2-x=5 \qquad \text{lorsque } x\geq 2$$

Au final, on obtient :

$$f(x) = \begin{cases} -5 & \text{lorsque} \quad x \leq -3 \\ 2x-1 & \text{lorsque} \quad -3 \leq x \leq 2 \\ 5 & \text{lorsque} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

2. En déduire le tableau des variations de f.

De l'expression de f obtenue à la question précédente on tire le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$				$\nearrow$	5	$\longrightarrow$	
		$\longrightarrow$	-5				

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leq 0$.

On cherche x tel que $2x-1=0 \Longleftrightarrow 2x=1 \Longleftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

D'après la question précédente f est décroissante sur $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right]$, par conséquent :

$$x \leq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \Longleftrightarrow f(x) \leq 0$$

On conclut que $f(x) \leq 0$ pour $x \in \left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right]$

Exercice 4.

La vitesse du son dans l'air, exprimée en km.h^{-1}, en fonction de la température T, exprimée en degré celcius, est donnée par la formule suivante :

$$v(\mathrm{T}) = 3,6 \times \sqrt{\frac{11,63(\mathrm{T}+273)}{0,029}}$$

1. A quelle vitesse, à 1 km.h^{-1} près, vole un avion qui franchit le « mur du son », c'est-à-dire lorsque sa vitesse atteint la vitesse du son, à 15° C ?[1]

On calcule $v(15)$:

$$v(15) = 3,6\sqrt{\frac{11,63(15+273)}{0,029}} \simeq 1223 \quad \text{km.h}^{-1}$$

2. Etudier les variations de la vitesse du son dans l'air en fonction de la température.

On cherche à montrer notre conjecture suivante :

Conjecture : v est une fonction strictement croissante sur $[-273; +\infty[$ i.e on cherche à montrer :

$$-273 \leq t < t' \Longrightarrow v(t) < v(t')$$

$$\begin{array}{ll} & -273 \leq t < t' \\ \Longleftrightarrow & 0 \leq t+273 < t'+273 \\ \Longleftrightarrow & 0 \leq 11,63(t+273) < 11,63(t'+273) \\ \Longleftrightarrow & 0 \leq \dfrac{11,63(t+273)}{0,029} < \dfrac{11,63(t'+273)}{0,029} \\ \Longleftrightarrow & 0 \leq \sqrt{\dfrac{11,63(t+273)}{0,029}} < \sqrt{\dfrac{11,63(t'+273)}{0,029}} \qquad \text{car la fonction } x \longmapsto \sqrt{x} \text{ est strictement croissante sur } [0; +\infty[\\ \Longleftrightarrow & 0 \leq 3,6\sqrt{\dfrac{11,63(t+273)}{0,029}} < 3,6\sqrt{\dfrac{11,63(t'+273)}{0,029}} \\ \Longleftrightarrow & 0 \leq v(t) < v(t') \end{array}$$

1. On dit qu'il vole à Mach 1

Ainsi image et antécédent sont rangés dans le même ordre, la fonction v est strictement croissante sur l'intervalle $[-273;+\infty[$.

3. Un jour d'orage, la température est de 30° C. Sami observe qu'il s'écoule 8 secondes entre l'éclair et le coup de tonnerre. En considérant que la propagation de la lumière est instantannée, à quelle distance de Sami la foudre est-elle tombée ?

   On sait que $v = \dfrac{d}{t} \Longleftrightarrow d = v \times t$.
   Or,
   $$v(30) = 3,6\sqrt{\frac{11,63(30+273)}{0,029}} \simeq 1255 \quad \text{km.h}^{-1} \simeq \frac{1255}{3600} \simeq 0,3486 \quad \text{km.s}^{-1}$$
   Ainsi :
   $$d = 0,3486 * 8 \simeq 2,8 \quad km$$
   La foudre entendue par Sami est tombée à un peu moins de 3 km.