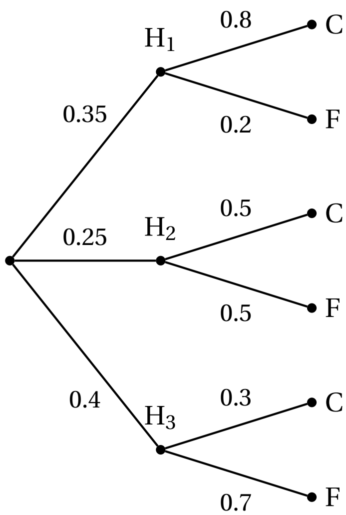
CORRECTION DES MÉTHODES
MÉTROPOLE 2013

Exercice 1 : Commun à tous les candidats — 4 points

1. **a.**



b. $P(C \cap H_3) = ... = 0.12$

c. $P(C) = P(C\cap H_1)+P(C\cap H_2)+P(C\cap H_3) = ... = 0.525$

d. $P_C(H_1) = \dfrac{P(C\cap H_1)}{P(C)} = ... \simeq 0.533$

2. **a.** On répète 10 fois de manière indépendante l'épreuve de Bernoulli « Choisir un arbre », le succès étant « L'arbre est un conifère », de probabilité $P(C) = 0.525$. X compte le nombre de succès dans le schéma de Bernoulli à 10 étapes.
Donc $X \hookrightarrow B(10; 0.525)$

b. $P(X = 5) = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} 0.525^5 \times 0475^5 \simeq 0.243$

c. Avoir au moins deux **feuillus** signifie avoir au plus 8 conifères. Or

$$P(X \leq 8) = 1 - P(X = 9) - P(X = 10) = ... \simeq 0.016$$

Exercice 2 : Commun à tous les candidats — 7 points

1. **a.** $\boxed{f(1) = 2}$ (abscisse de B) et $\boxed{f'(1) = 0}$ (coefficient directeur de (BC) : $y = 2$)

b. $f'(x) = \dfrac{\dfrac{b}{x} \times x - ((a + b\ln(x))}{x^2} = ...$ Donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln(x)}{x^2}}$

c. $f(1) = 2 \iff \dfrac{a + b\ln(1)}{1} = 2 \iff ... \iff \boxed{a = 2}$

$f'(1) = 0 \iff \dfrac{(b-a) - b\ln(1)}{1^2} = 0 \iff ... \iff \boxed{b = a = 2}$

2. **a.** Par conséquent, $f'(x) = ... = \dfrac{-2\ln(x)}{x^2}$.
Comme $x^2 > 0$ pour tout réel de $]0; +\infty[$, il est clair que $f'(x)$ est du signe de $-\ln(x)$ pour tout $x > 0$.

b. $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} 2 + 2\ln(x) = -\infty$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$ (pas une FI ...)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ d'après le cours et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

c. $\ln(x) > 0 \iff x > 1$

x	0	α	1	β	$+\infty$
Signe de $\ln(x)$		−	0	+	
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de f	$-\infty$	1	2	1	0

3. **a.** 3 conditions pour étudier le corollaire du TVI :

- f est continue sur $]0;1]$
- $f(1) = 2 > 1$ et $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty < 1$
- f est strictement croissante sur $]0;1]$

Donc il existe un unique $\alpha \in]0;1]$ tel que $f(\alpha) = 1$

b. Avec un tableau de valeur à la calculatrice on trouve $5 < \beta < 6$ donc $n = 5$

4. **a.**

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0	0	0.25	0.375	0.4373
b	1	0.5	0.5	0.5	0.5
$b-a$	1	0.5	0.25	0.125	0.0625
m	0.5	0.25	0.375	0.4375	

b. Cet algorithme trouve un encadrement de α à 0.1 près par dichotomie.
Le a et le b sont les bornes de cet encadrement.

c. Il suffit de changer l'initialisation $a := 5$ et $b := 6$ et échanger l'affectation de a et b dans la boucle, car f est décroissante sur $[5;6]$.
« Si $f(m) < 1$ alors $b := m$, sinon $a := m$. »

5. **a.** L'aire du rectangle est $\mathscr{A} = \text{OA} \times \text{AB} = \ldots = 2$, donc la moitié de cette aire vaut 1.
La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses pour x tel que $f(x) = 0 \iff \ldots \iff \ln(x) = -1 \iff x = \dfrac{1}{e}$
La courbe $\mathscr{C}$ coupe (BC) en B, donc pur $x = 1$.
Donc on cherche à montrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx = 1$.

b. $2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln(x)$ est de la forme $nu'u^{n-1}$ de primitive u^n avec $n = 2$ et $u(x) = \ln(x)$. Donc
$\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx = \left[2\ln(x) + \ln^2(x)\right]_{\frac{1}{e}}^{1} = \ldots = 0 - (-2+1) = 1$

Exercice 3 : Commun à tous les candidats — 4 points

1. **Proposition 1 :** On appelle A le point d'affixe i, B le point d'affixe -1 et M un point d'affixe z.
Alors $|z - i| = |z+1| \iff \text{AM} = \text{BM} \iff$ M appartient à la médiatrice de [AB]. **Vrai**

2. **Proposition 2 :** Cherchons l'écriture exponentielle de $1 + i\sqrt{3}$ ... On a $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$
Donc $(1+i\sqrt{3})^4 = 2^4 e^{i\frac{4\pi}{3}}$ ce qui n'est pas réel car $\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) \neq 0$ **Faux**

3. **Proposition 3 :** On se place dans le repère $\left(\text{A}; \overrightarrow{\text{AB}}; \overrightarrow{\text{AD}}; \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.
Ce repère est orthonormé car nous sommes dans un cube. Dans ce repère on a $\overrightarrow{\text{EC}}(-1;-1;1)$ et $\overrightarrow{\text{BG}}(0;1;1)$.
Or $\overrightarrow{\text{EC}} \cdot \overrightarrow{\text{BG}} = \ldots = 0$ **Vrai**

4. Vérifions que S appartient à la droite donnée, que nous appellerons (d).
$x_S = 2 + t \iff \ldots t = -1$. Or dans ce cas $-1 + t = \ldots = y_S$ et $1 + 3t = \ldots = z_S$. Donc $\text{S} \in (d)$
Un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est $\vec{n}(1;1;3)$. Or c'est aussi un vecteur directeur de (d).
Donc $(d) \perp \mathscr{P}$ **Vrai**

Exercice 4 : **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité** **5 points**

1. **a.** $u_1 = \frac{2}{3}u_0 + \frac{1}{3} \times 0 + 1 = \ldots = \frac{7}{3} \simeq 2.33$ $u_2 = \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3} \times 1 + 1 = \ldots = \frac{26}{9} \simeq 2.89$

$u_3 = \ldots = \frac{97}{27} \simeq 3.59$ $u_4 = \ldots \simeq 4.40$

b. Cette suite semble strictement croissante.

2. **a.** Par récurrence :

- On a $u_0 = 2 > 3$ donc la proposition est vrai au rang 0.
- On suppose qu'il existe un rang n tel que $u_n \leq n+3$.
  On veut montrer que cela implique que $u_{n+1} \leq n+4$.
  Or $u_n \leq n+3 \iff \ldots \iff \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq \frac{2}{3}(n+3) + \frac{1}{3}n + 1 \iff u_{n+1} \leq n+3 \leq n+4$
  Donc la proposition est héréditaire.
- La proposition est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

b. $u_{n+1} - u_n = \ldots = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$

c. Comme $u_n \leq n+3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n+3-u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

3. **a.** $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \ldots = \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 2$.

b. D'où $v_n = v_0 \times q^n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $u_n = v_n + n$, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n}$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{2}{3} < 1$. Et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

4. **a.** $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k + k = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k + \sum\limits_{k=0}^{n} k = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{n(n+1)}{2}$ car (v_n) est géométrique.

Donc $\boxed{S_n = \ldots = 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}}$

b. $T_n = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{n(n+1)}{2n^2}$ Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} = 0$ car $-1 < \frac{2}{3} < 1$

Et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \ldots = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$ Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \frac{1}{2}}$