I) Liban Mai 2011 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Étudier les variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à termes positifs définie par :

$$u_1 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_{n+1} = f(u_n) = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}.$$

1. Démontrer que, pour tout réel x positif, $\ln(1+x) \leqslant x$.
   On pourra étudier la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x - \ln(1+x)$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n+1) \leqslant \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f[\ln(n)] = \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.
4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n) \leqslant u_n$.
5. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geq 2$, $u_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n-1}$.
6. **a.** Démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a $\dfrac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

   b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, on a $u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)$.
7. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a montré que $\ln(n) \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)$.
   Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1.

II) Antilles-Guyane juin 2012 (2 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x-1} + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Le graphique donné en **Annexe 1** représente la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Construire sur ce graphique la droite Δ d'équation $y = 2x$. On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite Δ. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ limité par la courbe $\mathscr{C}$ la droite Δ, la droite d'équation $(x = 1)$ et l'axe des ordonnées.

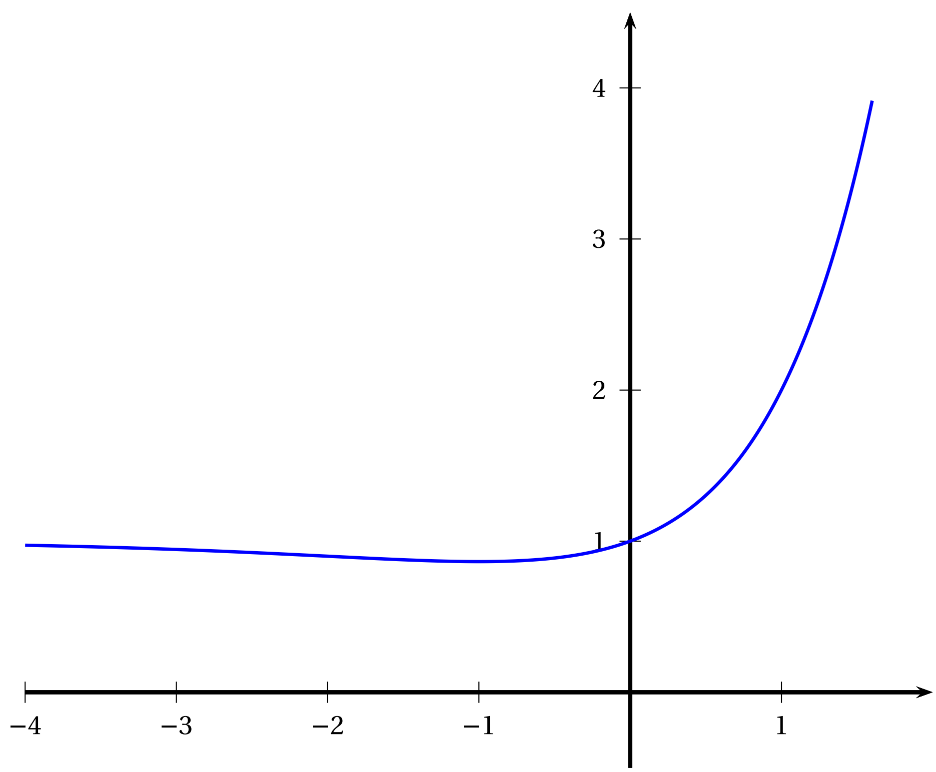
2. **a.** Montrer qu'il existe deux réels c et d tels que la fonction

$$\mathrm{H} : x \longmapsto (cx + d)e^{x-1}$$

soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $h : x \longmapsto xe^{x-1}$.

b. On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x-1}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\mathrm{I} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

3. En déduire la valeur exacte (en unités d'aire) de l'aire du domaine $\mathscr{D}$.



III) Centres étrangers juin 2012 (5 points)

On considère la suite (I_n) définie pour n entier naturel non nul par :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. **a.** Soit g la fonction définie par $g(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.
Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{G}(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g.

b. En déduire la valeur de I_1.

c. Pour tout entier naturel n, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction H_n par $\mathrm{H}_n(x) = x^{n+1}\mathrm{G}(x)$.

i. Montrer que H_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer pour tout réel x, $\mathrm{H}'_n(x)$

ii. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2}\mathrm{e} = \frac{n+1}{2}\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+2}$$

d. Calculer I_3 et I_5.

2. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1}{2}$
	Tant que $n < 21$ Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2}u$ Affecter à n la valeur $n+2$
Sortie	Afficher u

Quel terme de la suite (I_n) ontient-on en sortie de cet algorithme ?

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $\mathrm{I}_n \geqslant 0$.

b. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (I_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer la valeur de ℓ.

IV) Liban Mai 2012 (6 points)

Partie A :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$$

1. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.
   Donner une valeur approchée de α, arrondie au centième.
3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\Delta : y = 2x$.
2. Justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$. On prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie C :

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine $\mathscr{D}$ du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$.

1. Justifier que cette aire, exprimée en cm^2, est donnée par :

$$\mathrm{I}_n = 2\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

2. Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
   - **a.** Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.
   - **b.** En déduire $\displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$
   - **c.** En déduire l'expression de I_n en fonction de n.
3. Calculer la limite de l'aire I_n du domaine $\mathscr{D}$ quand n tend vers $+\infty$.

V) Amérique du Nord juin 2012 (5 points)

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[0;1]$ telle que :

$$f(0)=0 \text{ et } f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \text{ pour tout } x \text{ de } [0;1]\text{B}.$$

On ne cherchera pas à déterminer f.

PARTIE A.

1. Déterminer le sens de variation de f sur $[0\,;\,1]$.

2. Soit g la fonction définie sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ par $g(x)=f\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)$.

La fonction $\frac{\sin}{\cos}$ *est appelé tangente et notée* tan.
On a le résultat suivant : si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, *alors $f=v\circ u$ est dérivable sur* I *et $f'=u'\times v'\circ u$*

a. Justifier que g est dérivable sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$, puis que, pour tout x de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, $g'(x)=1$.

b. Montrer que, pour tout x de $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$, $g(x)=x$, en déduire que $f(1)=\frac{\pi}{4}$.

3. Montrer que, pour tout x de $[0\,;\,1]$, $0\leq f(x)\leqslant\frac{\pi}{4}$.

PARTIE B.

Soit (I_n) la suite définie par $I_0=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et, pour tout entier naturel n non nul, $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

1. Soit h la fonction définie sur $[0;1]$ par $h(x)=xf(x)$.

a. Calculer $h'(x)$ pour tout x de $[0;1]$.

b. Montrer que $\mathrm{I}_0=h(1)-h(0)-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,dx$.

c. En déduire que $\mathrm{I}_0=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(2)$.

2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n\geqslant 0$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n\leqslant\frac{\pi}{4(n+1)}$.

c. En déduire la limite de la suite (I_n).

VI) Métropole juin 2009, non complet (6 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + x\mathrm{e}^{-x}\right).$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

PARTIE I

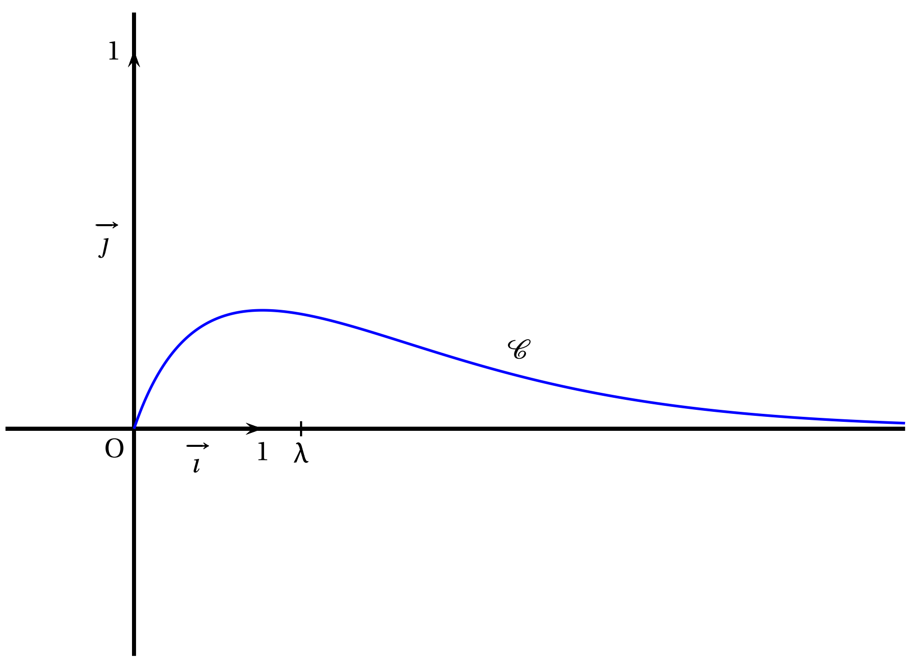
1. Justifier que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. Justifier que pour tout nombre réel positif x, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.
3. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

PARTIE II

Soit λ un nombre réel strictement positif. On pose $\mathscr{A}(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x$. On se propose de majorer $\mathscr{A}(\lambda)$.

1. Représenter, sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie), la partie du plan dont l'aire en unité d'aire, est égale à $\mathscr{A}(\lambda)$.
2. Justifier que pour tout nombre réel λ strictement positif, $\mathscr{A}(\lambda) \leqslant \lambda \times f(1)$.
3. **Application numérique**

   Avec chacune des deux méthodes, trouver un majorant de $\mathscr{A}(5)$, arrondi au centième. Quelle méthode donne le meilleur majorant dans le cas où $\lambda = 5$?



VII) Polynésie sept 2008, non complet (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(e^x + 2e^{-x}\right).$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans un repére orthogonal est donnée en annexe.

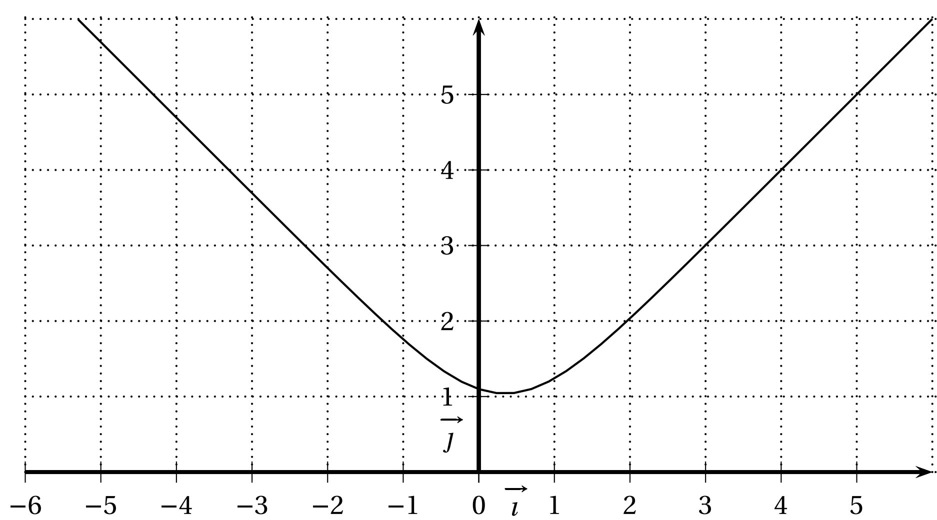
Partie A - étude de fonction f.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x + \ln\left(1 + 2e^{-2x}\right)$.
   On admet que, pour tout réel x, $f(x) = -x + \ln\left(2 + e^{2x}\right)$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
4. Etudier les variations de la fonction f.
   Montrer que le minimum de la fonction f est égal à $\dfrac{3}{2}\ln 2$.

Partie B - Encadrement d'une intégrale.

On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_2^3 [f(x) - x]\,\mathrm{d}x$.

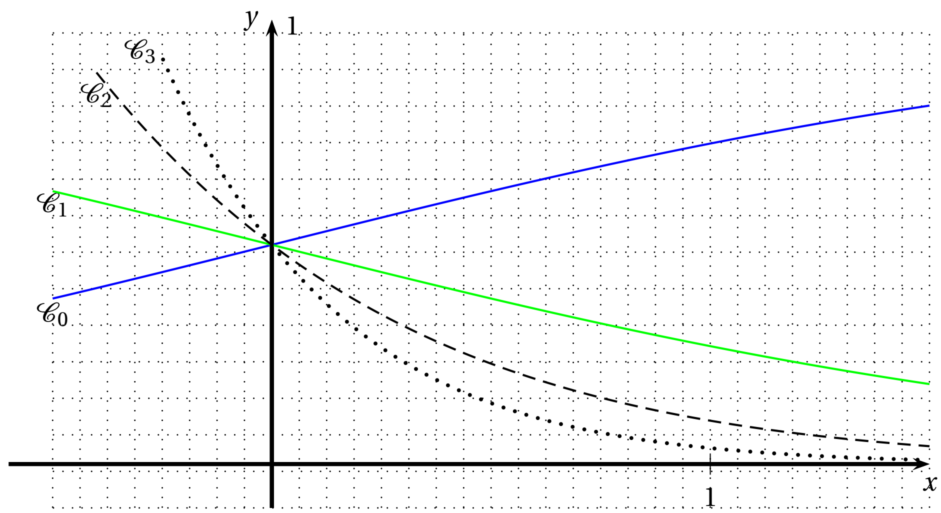
1. Donner une interprétation géométrique de I.
2. Montrer que, pour tout $\mathrm{X} \in [0\,;\,+\infty[$, $\ln(1+\mathrm{X}) \leqslant \mathrm{X}$.
3. En déduire que $0 \leqslant \mathrm{I} \leqslant \displaystyle\int_2^3 2e^{-2x}\,\mathrm{d}x$ et donner un encadrement de I d'amplitude 0,02.



VIII) Centres étrangers 2009 (6 points)

Soit n un entier naturel. On note f_n, la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$.

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont représentées ci-dessous :



Partie A : *Quelques propriétés des fonctions f_n et des courbes $\mathscr{C}_n$*

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point A en commun. On précisera ses coordonnées.

2. Etude de la fonction f_0

- **a.** Etudier le sens de variation de f_0.
- **b.** Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.
- **c.** Dresser le tableau de variation de fonction f_0 sur $\mathbb{R}$.

3. Etude de la fonction f_1

- **a.** Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel x.
- **b.** En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.
- **c.** Donner une interprétation géométrique de 3. a. pour les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

4. Etude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$

- **a.** Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel x, on a : $f_n(x) = \dfrac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}$.
- **b.** Etudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.
- **c.** Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.

Partie B : *étude d'une suite liée aux fonctions f_n*

On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1. Calculer u_1 puis montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_0.

2. Démontrer que, pour tout entier n : $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{-nx}\,dx$.

3. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 e^{-nx}\,dx$. En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.