RÉVISIONS
GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

I) Pondichéry avril 2013 (4 points)

Pour chacune des questions, quatre propositions de réponse sont données dont une seule est exacte. Pour chacune des questions indiquer, sans justification, la bonne réponse sur la copie. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Il en est de même dans le cas où plusieurs réponses sont données pour une même question.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal. t et t' désignent des paramètres réels.
Le plan (P) a pour équation $x-2y+3z+5=0$.

Le plan (S) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2+t+2t' \\ y &=& -t-2t' \\ z &=& -1-t+3t' \end{array}\right.$

La droite (D) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2+t \\ y &=& -t \\ z &=& -1-t \end{array}\right.$

On donne les points de l'espace M$(-1\,;\,2\,;\,3)$ et N$(1\,;\,-2\,;\,9)$.

1. Une représentation paramétrique du plan (P) est :

a. $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t \\ y &=& 1-2t \\ z &=& -1+3t \end{array}\right.$ **b.** $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t+2t' \\ y &=& 1-t+t' \\ z &=& -1-t \end{array}\right.$ **c.** $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t+t' \\ y &=& 1-t-2t' \\ z &=& 1-t-3t' \end{array}\right.$ **d.** $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t+t' \\ y &=& 1-2t+2t' \\ z &=& -1-t' \end{array}\right.$

2. **a.** La droite (D) et le plan (P) sont sécants au point A$(-8\,;\,3\,;\,2)$.

b. La droite (D) et le plan (P) sont perpendiculaires.

c. La droite (D) est une droite du plan (P).

d. La droite (D) et le plan (P) sont strictement parallèles.

3. **a.** La droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales.

b. La droite (MN) et la droite (D) sont parallèles.

c. La droite (MN) et la droite (D) sont sécantes.

d. La droite (MN) et la droite (D) sont confondues.

4. **a.** Les plans (P) et (S) sont parallèles.

b. La droite (Δ) de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t \\ y &=& -2-t \\ z &=& -3-t \end{array}\right.$ est la droite d'intersection des plans (P) et (S).

c. Le point M appartient à l'intersection des plans (P) et (S).

d. Les plans (P) et (S) sont perpendiculaires.

II) Liban mai 2013 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des propositions est correcte.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. On notera sur la copie le numéro de la question, suivi de la lettre correspondant à la proposition choisie.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives A(1 ; −1 ; 2), B(3 ; 3 ; 8), C(−3 ; 5 ; 4) et D(1 ; 2 ; 3).

On note $\mathscr{D}$ la droite ayant pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t+1 \\ y & = & 2t-1 \\ z & = & 3t+2 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$

et $\mathscr{D}'$ la droite ayant pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & k+1 \\ y & = & k+3 \\ z & = & -k+4 \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{R}$.

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+y-z+2=0$.

Question 1 :
Proposition a. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles.
Proposition b. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires.
Proposition c. Le point C appartient à la droite $\mathscr{D}$.
Proposition d. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales.

Question 2 :
Proposition a. Le plan $\mathscr{P}$ contient la droite $\mathscr{D}$ et est parallèle à la droite $\mathscr{D}'$.
Proposition b. Le plan $\mathscr{P}$ contient la droite $\mathscr{D}'$ et est parallèle à la droite $\mathscr{D}$.
Proposition c. Le plan $\mathscr{P}$ contient la droite $\mathscr{D}$ et est orthogonal à la droite $\mathscr{D}'$.
Proposition d. Le plan $\mathscr{P}$ contient les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Question 3 :
Proposition a. Les points A, D et C sont alignés.
Proposition b. Le triangle ABC est rectangle en A.
Proposition c. Le triangle ABC est équilatéral.
Proposition d. Le point D est le milieu du segment [AB].

Question 4 :
On note $\mathscr{P}'$ le plan contenant la droite $\mathscr{D}'$ et le point A. Un vecteur normal à ce plan est :
Proposition a. $\vec{n}\,(-1\,;\,5\,;\,4)$
Proposition b. $\vec{n}\,(3\,;\,-1\,;\,2)$
Proposition c. $\vec{n}\,(1\,;\,2\,;\,3)$
Proposition d. $\vec{n}\,(1\,;\,1\,;\,-1)$

III) Amérique du Nord mai 2013 (5 points)

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A$(0\,;4\,;1)$, B $(1\,;3\,;0)$, C$(2\,;\,-1\,;\,-2)$ et D $(7\,;\,-1\,;\,4)$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$.

a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.

a. Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

b. Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -4t-2 \\ y &=& t \\ z &=& 3t+2 \end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R}$$

c. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

IV) Nouvelle-Calédonie novembre 2011

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.
On considère les points : A$(0\,;0\,;2)$, B$(0\,;4\,;0)$ et C$(2\,;0\,;0)$.

1. Vérifier qu'une équation du plan (ABC) est : $2x+y+2z=4$.

2. **a.** Déterminer une équation du plan P passant par A et orthogonal à la droite (BC).

b. Soit Δ la droite intersection du plan P et du plan (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ. Quel rôle joue cette droite dans le triangle ABC ?

3. **a.** Soit Δ' la médiane issue de B du triangle ABC.
Montrer qu'une équation paramétrique de Δ' dans le triangle ABC est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t \\ y &=& 4-4t, \\ z &=& t \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}.$$

b. Montrer que le triangle ABC est un triangle isocèle.

4. Soit H le point d'intersection des droites Δ et Δ'. Montrer que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{8}{9}\,;\,\frac{4}{9}\,;\,\frac{8}{9}\right)$.
Que représente le point H pour le triangle ABC ?

5. Montrer que le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

V) Liban juin 2010

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On note (D) la droite passant par les points $A(1\,;\,-2\,;\,-1)$ et $B(3\,;\,-5\,;\,-2)$.

1. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2t \\ y & = & -2-3t \\ z & = & -1-t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

2. On note (D′) la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 2-k \\ y & = & 1+2k \\ z & = & k \end{array}\right. \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (D) et (D′) ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan (P) d'équation $4x+y+5z+3=0$.

a. Montrer que le plan (P) contient la droite (D).

b. Montrer que le plan (P) et la droite (D′) se coupent en un point C dont on précisera les coordonnées.

4. On considère la droite (Δ) passant par le point C et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}\,(1\,;\,1\,;\,-1)$.

a. Montrer que les droites (Δ) et (D′) sont perpendiculaires.

b. Montrer que la droite (Δ) coupe perpendiculairement la droite (D) en un point E dont on précisera les coordonnées.

VI) Amérique du Sud novembre 2009

Partie B

On considère les points A de coordonnées $(3\,;\,-2\,;\,2)$, B de coordonnées $(6\,;\,-2\,;\,-1)$, C de coordonnées $(6\,;\,1\,;\,5)$ et D de coordonnées $(4\,;\,0\,;\,-1)$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle. En déduire l'aire du triangle ABC.

2. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1\,;\,-2\,;\,1)$ est normal au plan (ABC).
Déterminer une équation du plan (ABC).

Partie C

Soit Q le plan d'équation $x-2y+z-5=0$.

1. Déterminer la position relative des deux plans Q et (ABC).

2. Q coupe les droites (DA), (DB) et (DC) respectivement en E, F et G.
Déterminer les coordonnées de E et montrer que E appartient au segment [DA].