I) Pondichéry avril 2013 (5 points)

Partie 1 : On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. Le graphique en annexe 1 représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.

On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type : $h(t) = \dfrac{a}{1 + b\mathrm{e}^{-0,04t}}$

où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.

On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure $0,1$ m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.

Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

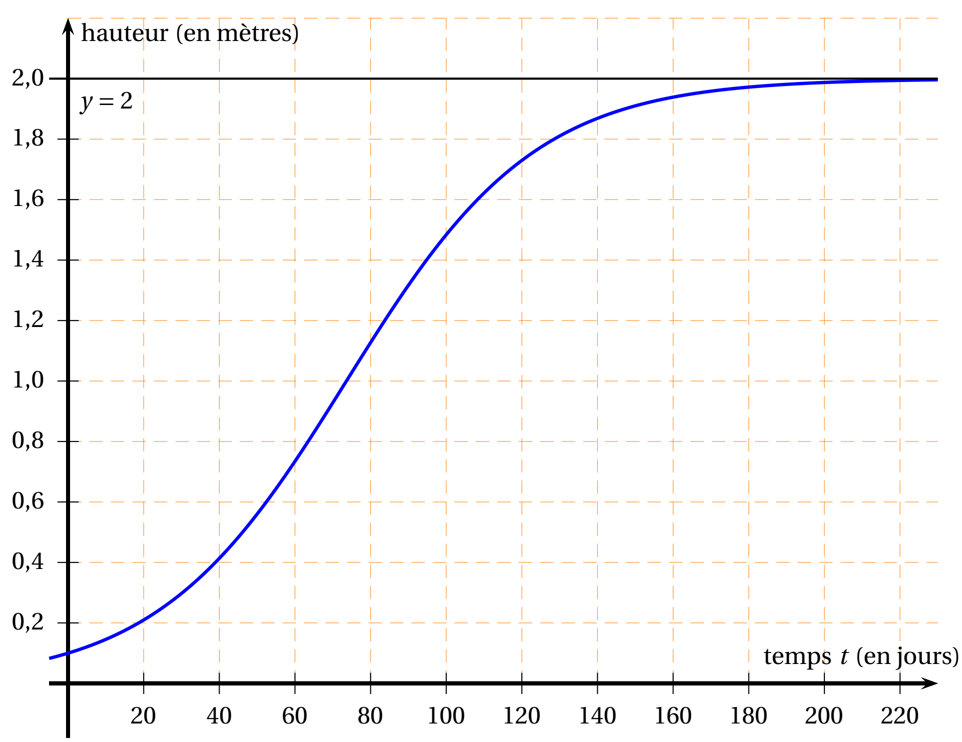
Partie 2 : On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur $[0\,;250]$ par

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

1. Déterminer $f'(t)$ en fonction de t (f' désignant la fonction dérivée de la fonction f). En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;250]$.
2. Calculer le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à $1,5$ m.
3. **a.** Vérifier que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;250]$ on a $f(t) = \dfrac{2\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t} + 19}$.
   Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;250]$ par
   $\mathrm{F}(t) = 50\ln\left(\mathrm{e}^{0,04t} + 19\right)$ est une primitive de la fonction f.

   b. Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50\,;100]$.
   En donner une valeur approchée à 10^{-2} près et interpréter ce résultat.
4. On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs ; elle est donnée par la fonction dérivée de la fonction f.
   La vitesse de croissance est maximale pour une valeur de t.
   En utilisant le graphique donné en annexe, déterminer une valeur approchée de celle-ci. Estimer alors la hauteur du plant.

Annexe (Exercice 1)



II) Liban mai 2013 (6 points)

Étant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-kx}}$.
Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.
La représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1 dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est donnée en ANNEXE, à rendre avec la copie.

1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Démontrer que, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
3. On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f_1'(x)$.
   En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
4. On définit le nombre $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\mathrm{I} = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$. Donner une interprétation graphique de I.

Partie B : Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1}.
Pour tout réel x, on appelle P le point de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathscr{C}_{-1}$ d'abscisse x.
On note K le milieu du segment [MP].

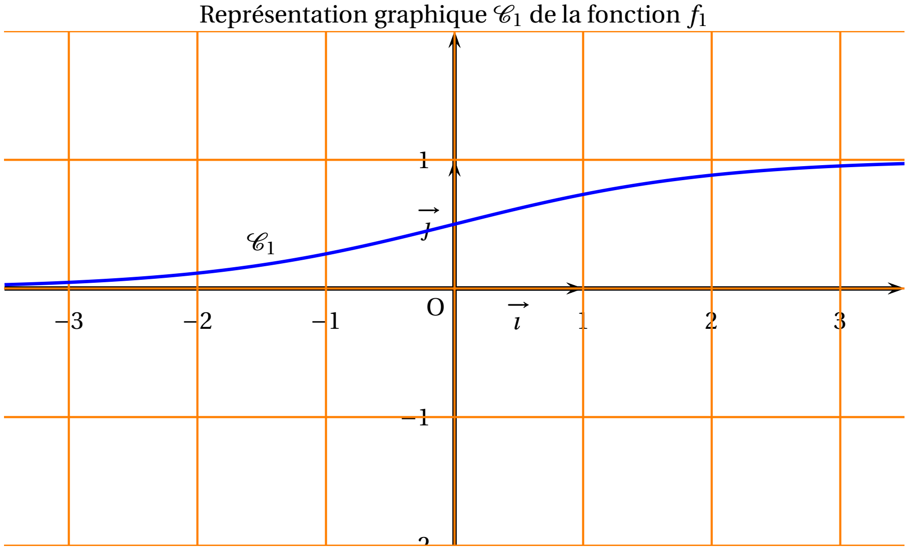
1. Montrer que, pour tout réel x, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.
2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.
4. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_{-1}$ l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Partie C : Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.
2. Quelle que soit la valeur du réel k, la fonction f_k est strictement croissante.
3. Pour tout réel $k \geqslant 10$, $f_k\left(\dfrac{1}{2}\right) \geqslant 0,99$.

ANNEXE de l'EXERCICE 3, à rendre avec la copie

Représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1

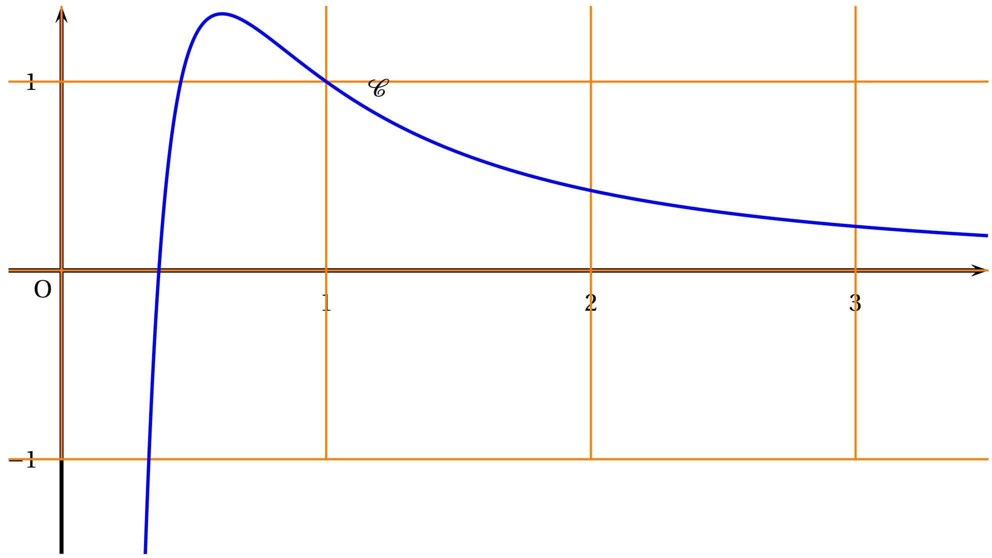


III) Amérique du Nord 2013 (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1. **a.** Étudier la limite de f en 0.

   b. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

   c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

   b. Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+00[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. **a.** Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

   b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = n$.

   a. Démontrer que $0 \leqslant \mathrm{I}_2 \leqslant \mathrm{e} - \dfrac{1}{2}$.

   On admet que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+00[$ par $\mathrm{F}(x) = \dfrac{-2-\ln(x)}{x}$,est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   b. Calculer I_n en fonction de n.

   c. Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

IV) Nouvelle Calédonie Novembre 2011, sans intégrale (5 points)

1. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x.$$

a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b. Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

c. Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $]0\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

2. Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1,5$ et pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = g(u_n) = \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$.
On a représenté en **annexe 1 (à rendre avec la copie)** la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction g et la droite d'équation $y = x$.

a. Construire sur l'axe des abscisses, en laissant les traits de construction apparents, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

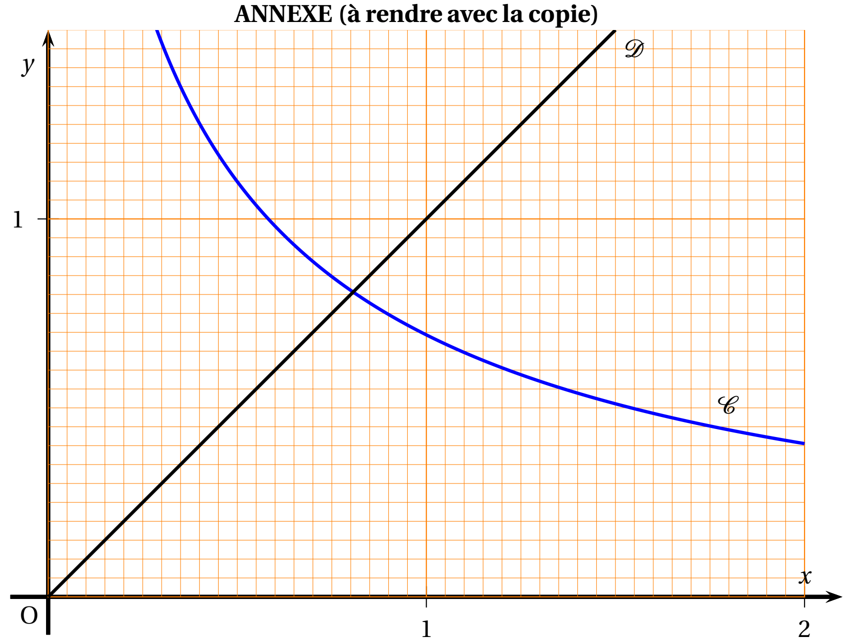
b. Le graphique permet-il d'émettre les conjectures suivantes ?
On recopiera sur la copie le numéro de la conjecture suivie de OUI ou NON.
Aucune justification n'est demandée.

- Conjecture 1 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. »
- Conjecture 2 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $0,5$. »
- Conjecture 3 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. »

c. On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ strictement positive.
Montrer que $\ln\left(1+\frac{1}{\ell}\right) = \ell$.

d. Montrer que $\ell = \alpha$.

ANNEXE (à rendre avec la copie)



V) Métropole - La Réunion Septembre 2011, sans intégrale (6 points)

Partie A - Étude du signe d'une fonction

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $\quad f(x) = x^2 + 4\ln x$.

1. Déterminer le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α et une seule dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

3. En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel strictement positif x.

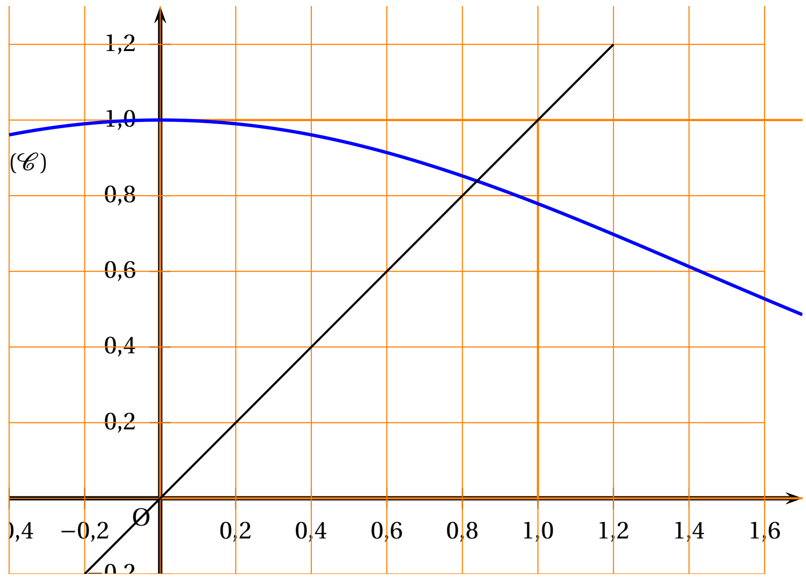
Partie B - Une valeur approchée du réel α défini dans la partie A

Sur le graphique fourni ci-contre, on a tracé une partie de la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$$

On définit la suite (u_n) par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0,5 \\ u_{n+1} & = & g(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$



1. Vérifier que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.

2. Au moyen de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite d'équation $y = x$, représenter les termes u_1, u_2 et u_3 de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses. Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

3. On admet que pour tout entier naturel n, $\quad u_{2n} \leqslant \alpha \leqslant u_{2n+1}$.

En utilisant la calculatrice, déterminer le plus petit entier n pour lequel les trois premières décimales de u_n et u_{n+1} sont identiques.

En déduire que $0,838$ est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Partie C - Un problème de distance

On appelle (Γ) la courbe représentative, dans un repère orthonormal, de la fonction φ définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$\varphi(x) = 2\ln x.$$

L'objectif de cette partie est de démontrer que parmi les points de la courbe (Γ), il y en a un et un seul qui est plus proche de l'origine O que tous les autres.

1. Soient M un point de la courbe (Γ) et x son abscisse. Exprimer OM en fonction de x.

2. **a.** Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $\quad h(x) = x^2 + 4(\ln x)^2$.

Étudier les variations de la fonction h. On pourra utiliser la partie A.

b. En déduire qu'il existe un unique point A de la courbe (Γ) tel que pour tout point M de (Γ), distinct de A, on ait OM > OA.

3. Démontrer que la droite (OA) est perpendiculaire à la tangente $\mathrm{T_A}$ à la courbe (Γ) au point A.

VI) Annales sur la fonction expo, sans intégrale

Exercice 1 : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Rappelez la définition d'une fonction continue en zéro. Existe-t-il une valeur de a telle que f soit continue en zéro ?
2. Sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, montrez que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.
3. Rappelez la définition d'une fonction dérivable en zéro. La fonction f est-elle dérivable en zéro ?
4. Calculez $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. La fonction f' est-elle continue en zéro ?
5. Déterminez une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $\begin{cases} f(x) = u(x)\exp(v(x)) & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = a \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$ telle que f soit continue en zéro mais pas dérivable en zéro. Vous expliquerez au maximum les raisons qui vous ont conduit à chercher $u(x)$ et $v(x)$ sous une forme plutôt qu'une autre. toout raisonnement sera évalué même s'il n'aboutit pas à une solution explicite.

Exercice 2 :

A - Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$. Démontrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$.

B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$. On note $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan. On prendra 4 cm pour unité graphique.

1. *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

   Étudier les variations de la fonction f et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variations le plus complet possible.
2. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$. On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.

C - Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (x+1)\mathrm{e}^{kx}$. On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal du plan.

On remarque que le cas $k = -1$ a été traité dans la partie B, car on a $f_{-1} = f$ et $\mathscr{C}_{-1} = \mathscr{C}$.

1. a. Quelle est la nature de la fonction f_0 ?

   b. Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

   Vérifier que, pour tout entier k, ces points appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_k$.
2. Étudier, suivant les valeurs du réel x, le signe de l'expression : $(x+1)\left(\mathrm{e}^x - 1\right)$.

   En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.
3. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.

   En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k. (On distinguera les cas : $k > 0$ et $k < 0$.)

4 Le graphique suivant représente quatre courbes $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{H}$, et $\mathscr{K}$, correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre k, parmi les entiers -1, -3, 1 et 2. Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.