# EXERCICES : LA FONCTION EXPONENTIELLE

**Exercice 1** : En utilisant le résultat suivant $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ , déterminer les limites suivantes :

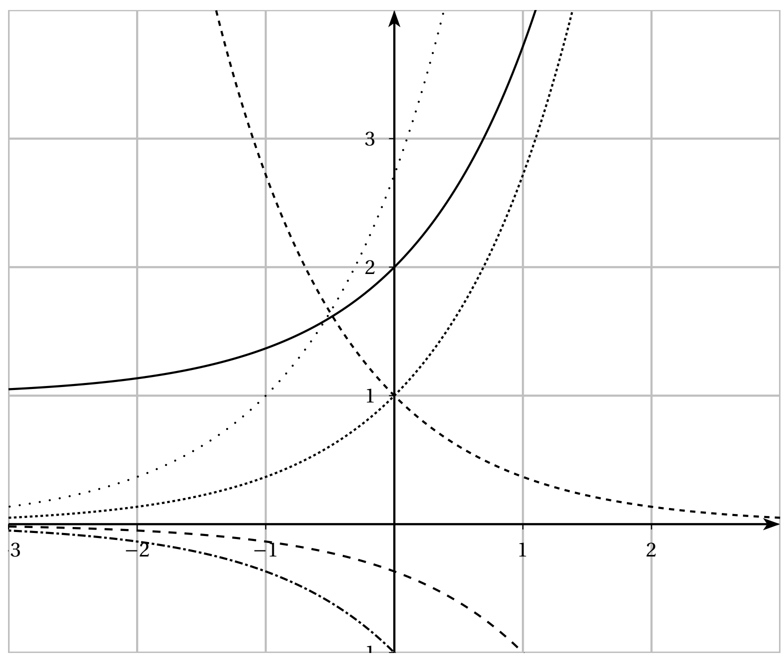
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x\left(e^{\frac{1}{x^2}} - 1\right)$$

**Exercice 2** : Calculer les dérivées et les limites aux bornes des ensembles de définitions des fonctions définies par les expressions suivantes :

1. $f_1(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + 1$
2. $f_2(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)$
3. $f_3(x) = \dfrac{3x + 1 - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}$
4. $f_4(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$
5. $f_5(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)}$
6. $f_6(x) = \mathrm{e}^{5x^3 + 7x + 4}$

**Exercice 3** : Reconnaître parmi les figures ci-contre les courbes représentatives des fonctions suivantes :

- $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$
- $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$
- $x \longmapsto \mathrm{e}^{x+1}$
- $x \longmapsto \mathrm{e}^{x} + 1$
- $x \longmapsto -\mathrm{e}^{x}$
- $x \longmapsto -\mathrm{e}^{x-1}$




**Exercice 4** : Le plan est rapporté à un repère orthonormal.
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - 2,1\mathrm{e}^x + 1,1x + 1,6$$

1. Faites apparaître sur l'écran de votre calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre $-5 \leqslant x \leqslant 4$, $-4 \leqslant y \leqslant 4$.
   Reproduire l'allure de la courbe obtenue sur votre copie.
2. D'après cette représentation graphique, que pourrait-on conjecturer :
   - **a.** Sur les variations de la fonction $f$ ?
   - **b.** Sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ ?
3. On se propose maintenant d'étudier la fonction $f$.

**a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{2x} - 2,1e^{x} + 1,1 \geqslant 0$ (on pourra poser $X = e^{x}$).

**b.** Étudier les variations de la fonction $f$.

**c.** Déduire de cette étude le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

**4.** On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative de la fonction $f$ sur l'intervalle $[-0,05\ ;\ 0,15]$, de façon à visualiser les résultats de la question **3.**
Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée $y$ peut-on choisir pour la fenêtre de la calculatrice ?

**Exercice 5** : Six affirmations, réparties en deux thèmes et numérotées de 1. a à 2. c sont proposées ci-dessous. Le candidat portera sur sa copie, en regard du numéro de l'affirmation, et avec le plus grand soin, la mention VRAI ou FAUX.
Chaque réponse convenable rapporte 0,4 point. Chaque réponse erronée enlève 0,1 point. Il n'est pas tenu compte de l'absence de réponse. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

**1.** Pour tout réel $x$, $e^{x}$ désigne l'image de $x$ par la fonction exponentielle.

| | |
|---|---|
| Affirmation 1. a | Pour tous les réels $a$ et $b$ : $\left(e^{a}\right)^{b} = e^{\left(a^{b}\right)}$. |
| Affirmation 1. b | Pour tous les réels $a$ et $b$ : $e^{a-b} = \dfrac{e^{a}}{e^{b}}$. |
| Affirmation 1. c | La droite d'équation $y = x + 1$ est la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle en son point d'abscisse 1. |

**2.** Soit $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit $a$ un élément de I.

| | |
|---|---|
| Affirmation 2. a | Si $f$ est dérivable en $a$, alors $f$ est continue en $a$. |
| Affirmation 2. b | Si $f$ est continue en $a$, alors $f$ est dérivable en $a$. |
| Affirmation 2. c | Si $f$ est dérivable en $a$, alors la fonction $h \mapsto \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0. |

**Exercice 6** :
On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{x-1} + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

**Partie A : étude de la fonction**

**1.** Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$ ?

**2.** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

**3.** On admet que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note $f'$ sa fonction dérivée.
Montrer que, pour tout réel $x$, $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$.

**4.** Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

**Partie B : recherche d'une tangente particulière**

Soit $a$ un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $a$, qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle $T_a$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $a$. Donner une équation de $T_a$.
2. Démontrer qu'une tangente à $\mathscr{C}$ en un point d'abscisse $a$ strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si $a$ vérifie l'égalité
$$1 - a^2 e^{a-1} = 0.$$
3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation
$$1 - x^2 e^{x-1} = 0.$$
4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

**Exercice 7** :

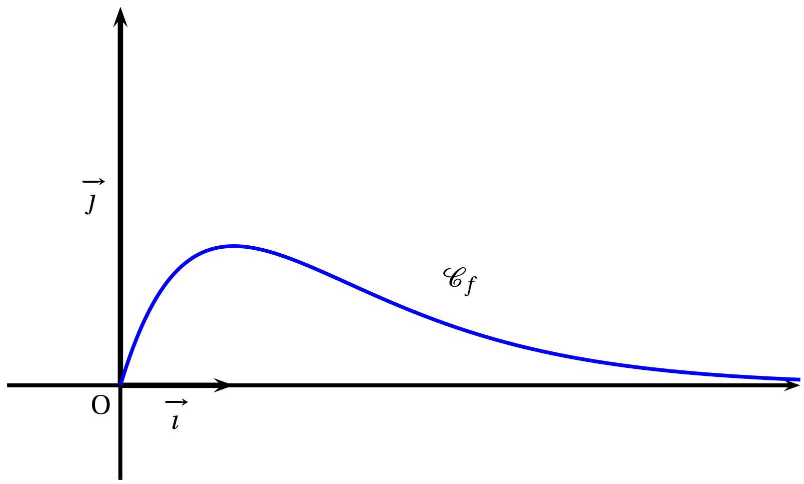
1. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \left(2x^3 - 4x^2\right) e^{-x}.$$
   **a.** Déterminer les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
   **b.** Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = 2x\left(-x^2 + 5x - 4\right) e^{-x}$.
   **c.** Dresser le tableau de variations de $f$.
   **d.** Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de $f$ dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(unité graphique : 1 cm).
2. Soit $u$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On définit la fonction $v$ sur $]0\,;\,+\infty[$ par $v(x) = u\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   **a.** On suppose que $u$ est croissante sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ (où $0 < a < b$).
   Déterminer le sens de variation de $v$ sur $\left[\dfrac{1}{b}\,;\,\dfrac{1}{a}\right]$.
   **b.** On définit maintenant la fonction $g$ par $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $]0\,;\,+\infty[$, où $f$ est la fonction définie dans la question 1.
   Déterminer les limites de $g$ en 0 et en $+\infty$,
   **c.** Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction $g$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

**Exercice 8** : Soient $f$ et $g$ les fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par
$$f(x) = xe^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 e^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions $f$ et $g$ dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f$ dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est donnée en annexe (à rendre avec la copie).

1. D'après le graphique, quelles semblent être les variations de la fonction $f$ et sa limite en $+\infty$ ?
2. Valider ces conjectures à l'aide d'une démonstration.
3. Tracer sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie) la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction $g$.
4. Quelle semble être la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$ ?
   Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.




**Exercice 9** : **A - Restitution organisée de connaissances**

On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$. Démontrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$.

**B - Étude d'une fonction**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$. On note $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan. On prendra 4 cm pour unité graphique.

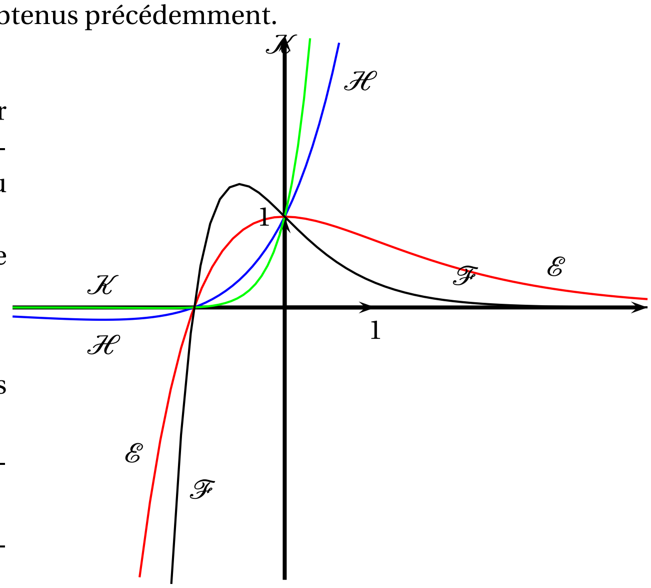
1. *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

   Étudier les variations de la fonction $f$ et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variations le plus complet possible.
2. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$. On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.

**C - Étude d'une famille de fonctions**

Pour tout entier relatif $k$, on note $f_k$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (x+1)\mathrm{e}^{kx}$. On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction $f_k$ dans un repère orthonormal du plan.

On remarque que le cas $k = -1$ a été traité dans la partie B, car on a $f_{-1} = f$ et $\mathscr{C}_{-1} = \mathscr{C}$.




1. **a.** Quelle est la nature de la fonction $f_0$ ?

   **b.** Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

   Vérifier que, pour tout entier $k$, ces points appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_k$.
2. Étudier, suivant les valeurs du réel $x$, le signe de l'expression : $(x+1)\left(\mathrm{e}^x - 1\right)$.

   En déduire, pour $k$ entier relatif donné, les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.
3. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel $x$ et pour tout entier $k$ non nul.

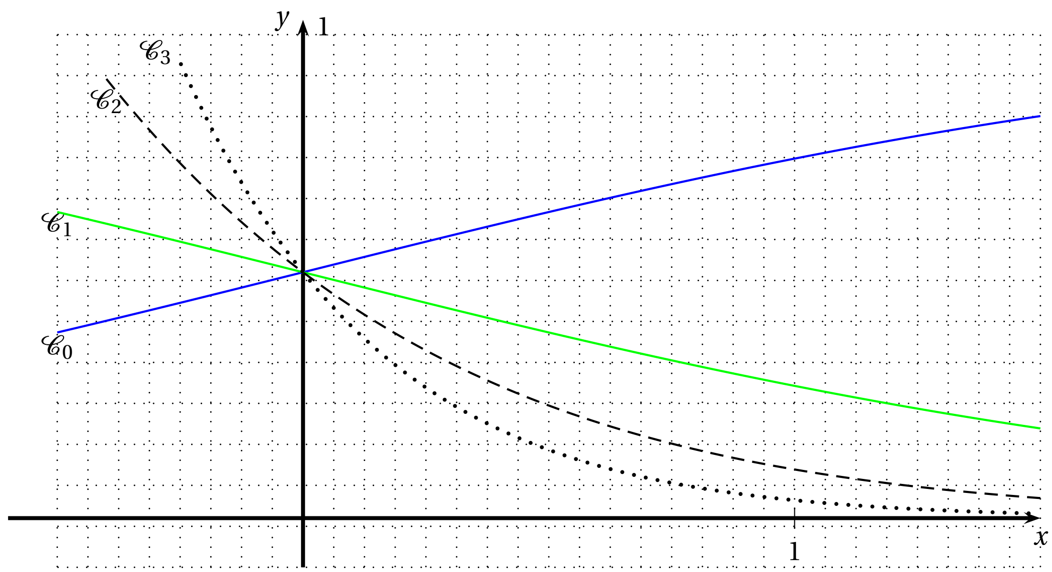
   En déduire le sens de variation de la fonction $f_k$ suivant les valeurs de $k$. (On distinguera les cas : $k > 0$ et $k < 0$.)

**4** Le graphique suivant représente quatre courbes $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{H}$, et $\mathscr{K}$, correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre $k$, parmi les entiers $-1$, $-3$, $1$ et $2$.
Identifier les c.ourbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.

**Exercice 10** : Soit $n$ un entier naturel.
On note $f_n$, la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont représentées ci-dessous :




1. Démontrer que pour tout entier naturel $n$ les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point A en commun. On préciser ses coordonnées.
2. Étude de la fonction $f_0$
   - **a.** Étudier le sens de variation de $f_0$.
   - **b.** Préciser les limites de la fonction $f_0$ en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.
   - **c.** Dresser le tableau de variation de fonction $f_0$ sur $\mathbb{R}$.
3. Étude de la fonction $f_1$
   - **a.** Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel $x$.
   - **b.** En déduire les limites de la fonction $f_1$ en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.
   - **c.** Donner une interprétation géométrique de 3. a. pour les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.
4. Étude de la fonction $f_n$ pour $n \geqslant 2$
   - **a.** Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel $x$, on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}.$$

**b.** Étudier les limites de la fonction $f_n$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

**c.** Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction $f_n$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 11** :

1. **Restitution organisée de connaissances.**

   L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

   On supposera connus les résultats suivants :

   - la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée ;
   - $e^0 = 1$ ;
   - pour tout réel $x$, on a $e^x > x$.
   - Soient deux fonctions $\varphi$ et $\psi$ définies sur l'intervalle $[A\,;\,+\infty[$ où A est un réel positif.
     Si pour tout x de $[A\,;\,+\infty[$, $\psi(x) \leqslant \varphi(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

   **a.** On considère la fonction $g$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.
   Montrer que pour tout $x$ de $[0\,;\,+\infty[$, $g(x) \geqslant 0$.

   **b.** En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

2. On appelle $f$ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}}$.

   On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

   **a.** Montrer que $f$ est positive sur $[0\,;\,+\infty[$.

   **b.** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$. En déduire une conséquence graphique pour $\mathscr{C}$.

   **c.** Étudier les variations de $f$ puis dresser son tableau de variations sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. On considère la fonction F définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x) == 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$.

   **a.** Montrer que F est une fonction strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

   **b.** Calculer la limite de F en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de F sur $[0\,;\,+\infty[$.

   **c.** Justifier l'existence d'un unique réel positif $\alpha$ tel que $F(\alpha) = 0,5$.
   À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-2}$ près par excès.

**Exercice 12** : On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)e^{-2x}$ et sa courbe représentative (C) dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

### Partie A - Étude de la fonction $f$

1. **a.** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour (C) ?

   **b.** Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.

2. Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de $f'$ sur $\mathbb{R}$.

3. Dresser le tableau de variation de $f$.

4. **a.** Déterminer les coordonnées du point A d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

   **b.** Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x$.

**Partie B - Étude d'une tangente**

1. On rappelle que $f''$ désigne la dérivée seconde de $f$.
   a. Montrer que, pour tout réel $x$, $f''(x) = 4(2x-1)e^{-2x}$.
   b. Résoudre l'équation $f''(x) = 0$.
2. Soit B le point d'abscisse $1/2$ de la courbe (C). Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en B.
3. On veut étudier la position relative de (C) et (T) : pour cela on considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = f(x) - \left(-\frac{2}{e}x + \frac{3}{e}\right)$$

   a. Déterminer $g'(x)$ et $g''(x)$.
   b. Étudier le signe de $g''(x)$ suivant les valeurs $x$. En déduire le sens de variation de $g'$ sur $\mathbb{R}$.
   c. Calculer $g'(1/2)$ et en déduire le signe de $g'(x)$ puis le sens de variation de $g$ sur $\mathbb{R}$.
   d. Calculer $g(1/2)$ et déterminer alors le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$. Que peut-on en conclure sur la position relative de (C) et (T) ?

(Bac 2001)

**Exercice 13** : La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Rappelez la définition d'une fonction continue en zéro.
2. Existe-t-il une valeur de $a$ telle que $f$ soit continue en zéro ?
3. Sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, montrez que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.
4. Rappelez la définition d'une fonction dérivable en zéro.
5. La fonction $f$ est-elle dérivable en zéro ?
6. Calculez $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. La fonction $f'$ est-elle continue en zéro ?
7. Déterminez une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $\begin{cases} f(x) = u(x)\exp(v(x)) & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = a & \text{si } x = 0 \end{cases}$ telle que $f$ soit continue en zéro mais pas dérivable en zéro. Vous expliquerez au maximum les raisons qui vous ont conduit à chercher $u(x)$ et $v(x)$ sous une forme plutôt qu'une autre. toout raisonnement sera évalué même s'il n'aboutit pas à une solution explicite.

**Exercice 14** : On appelle cosinus hyperbolique la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\cosh : x \mapsto \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

sinus hyperbolique la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\sinh : x \mapsto \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

et tangente hyperbolique la fonction définie par

$$\tanh : x \mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

1. Déterminez les dérivées de ces fonctions en fonction de cosh et sinh.
2. Étudiez ces fonctions pour montrer que cosh est à valeurs dans $[1,+\infty]$ et que tanh est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1,1]$.
3. Calculez $\tanh(x)$ en fonction de $e^x$ et $e^{-x}$, puis en fonction de $e^{2x}$, enfin en fonction de $e^{-2x}$.
4. Montrez que $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$.
5. Montrez que $\cosh(x+y)=\cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y)$ et que $\sinh(x+y)=\sinh(x)\cosh(y)+\cosh(x)\sinh(y)$.
6. Déduisez-en que $\tanh(x+y)=\dfrac{\tanh(x)+\tanh(y)}{1+\tanh(x)\tanh(y)}$
7. On pose $t=\tanh(x/2)$. Montrez que $\cosh(x)=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ puis que $\sinh(x)=\dfrac{2t}{1-t^2}$
8. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $5\cosh(x)-4\sinh(x)=3$. Vous donnerez une valeur approchée de la solution à $10^{-3}$ près.
9. Pour le plaisir : dérivez la fonction $x\mapsto\dfrac{2\sin(x)\sinh(x)}{(\sinh(x)+\sin(x))^2}$
10. Soit $y\in\mathbb{R}$. Comparez $\sinh(y)$ et $y$.
11. Montrez que $\sinh(2x)=2\sinh(x)\cosh(x)$ puis étudiez la fonction $f$ définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{\tanh(x)}{x}$$

.

**Exercice 15** : L'équation de la hauteur $h$ par rapport au sol d'un fil électrique suspendu entre deux poteaux s'obtient en résolvant l'*équation différentielle*

$$h''(x)=k\sqrt{1+(h'(x))^2}$$

où $k$ est un paramètre qui dépend de la densité et de la tension du fil et $x$ est mesuré en mètres horizontalement à partir d'une origine située sur le sol en-dessous du point où la hauteur du fil est la plus faible.

1. Vérifiez que $h\ :\ x\mapsto\dfrac{1}{k}\cosh(kx)$ satisfait cette équation différentielle.
2. Quelle est la hauteur minimale du fil si le paramètre $k$ vaut $0,05$ ?
3. Quelle est la hauteur des poteaux (de même hauteur) s'ils sont distants de 30 m et que le paramètre $k$ vaut 0,05 ?