**EXERCICES**
**LES MATHS : L'INTÉGRALE !**

# I ) Intégration sans primitives

**Exercice 1** : On donne $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

1. Prouvez que, pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{t^2}{2} \leq \dfrac{t^2}{1+t} \leq t^2$.
2. Déduisez-en un encadrement de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\,dt$.

**Exercice 2** : Soit $f$ une fonction continue et positive sur $[0;1]$ telle que, pour tout $x \in [0;1]$, il existe deux réels $m$ et M tels que :

$$m \leq f(x) \leq \mathrm{M}$$

Déterminer la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx$$

**Exercice 3** : Etudier la limite de la suite de terme général

$$u_n = \int_n^{n+1} e^{-x}\,dx$$

Vous pourrez commencer par encadrer $e^{-x}$ sur $[n;n+1]$ en fonction de $n$.

**Exercice 4** : On pose $\quad \mathrm{I}_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\,dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Prouver que $\quad 0 \leq \mathrm{I}_n \leq \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx$
2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$

# II ) Primitives et intégration

**Exercice 5** : Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\mathrm{F}(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$.
Calculer $\mathrm{F}'(x)$. Qu'a-t-on démontré ?

**Exercice 6** : Calculer une primitive de $f_i$ sur $]0;1[$ dans les cas suivants :

$$f_1(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^2} \qquad f_2(x) = \tan x \qquad f_3(x) = \frac{1}{x\ln x}$$

**Exercice 7** : Etudier si F est une primitive de $f$ sur I :

1. $f(x) = \dfrac{2x^2+8x-5}{(x^2+x+3)^2}$ et $F(x) = \dfrac{x^2-x+2}{x^2+x+3}$ avec $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{2x-3}{2x\sqrt{x}}$ et $F(x) = \dfrac{2x+3}{\sqrt{x}}$ avec $I = ]0;+\infty[$.
3. $f(q) = \dfrac{3q-4}{\sqrt{2q-4}}$ et $F(q) = q\sqrt{2q-4}$ avec $I = ]2;+\infty[$.

**Exercice 8** : Si vous reconnaissez une forme du style $u'u^n$, alors une primitive sera $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$

En déduire une primitive de $f$ avec $f(x) = \dfrac{3}{(x-1)^2}$ sur $]1;+\infty[$.

**Exercice 9** : $f$ est la fonction définie sur $I[-1;8]$ par $f(x) = \dfrac{2x^3+8x^2+8x-3}{x^2+4x+4}$

1. Démontrer que pour tout $x \in I$ on a $f(x) = 2x - \dfrac{3}{(x+2)^2}$
2. **a.** En déduire une primitive G de $f$ sur I.
   **b.** Calculer la primitive F de $f$ telle que $F(0) = 2$.

**Exercice 10** :

1. $f$ est la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{2}{(x-2)^2}$.
   Déterminer une primitive F de $f$ sur $]2;+\infty[$.
2. G est la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $G(x) = \dfrac{3x-4}{x-2}$.
   Calculer la fonction dérivée de G.
3. Que peut-on en déduire pour les fonctions F et G ? Vérifier ce résultat en calculant $F(x) - G(x)$.

**Exercice 11** : Déterminer une primitive sur les intervalles I considérés de :

1. $g : x \longmapsto \dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$ avec $I = ]-1;1[$
2. $h : x \longmapsto \dfrac{e^x+3}{(e^x+3x)^3}$ avec $I = ]-\infty;0]$
3. $k : x \longmapsto \dfrac{1}{(ax+b)^2}$ avec $I = \left]-\dfrac{b}{a};+\infty\right[$
4. $f : x \longmapsto \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ avec $I = \mathbb{R}^{+*}$
5. $j : x \longmapsto e^{3x+2}$ avec $I = \mathbb{R}$
6. $l : x \longmapsto (2x+1)e^{x^2+x+7}$ avec $I = \mathbb{R}$
7. $m : x \longmapsto \sin(3x) + 3\cos(2x)$ avec $I = \mathbb{R}$

**Exercice 12** : On rappelle que $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$ Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{4}$

**Exercice 13** : Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 xe^{-x^2}dx \qquad \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\ln t}{t}dt \qquad \int_2^4 \frac{e^t}{e^t+1}dt \qquad \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

# III ) Extension aux fonctions de signe quelconque

**Exercice 14** :

1. **Vrai ou faux ?** L'intégrale d'une fonction continue et impaire est nulle.
2. **Vrai ou faux ?** Si $\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = 0$, alors $f$ est impaire.
3. Trouvez une fonction paire, non identiquement nulle sur $[-2,2]$, telle que $\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = 0$.
4. **Vrai ou faux ?** Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors $\int_{1}^{x} f(t)\,dt$ admet une limite finie quand $x$ tend vers $+\infty$.
5. Trouvez une fonction telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \int_{1}^{x} f(t)\,dt = +\infty$
6. Trouvez une fonction telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \int_{1}^{x} f(t)\,dt = 32$
7. **Vrai ou faux ?**Soit $u$ un réel strictement positif, alors $\int_{0}^{u} \mathrm{E}(x)\,dx \in \mathbb{N}$, $\mathrm{E}(x)$ désignant la *partie entière* de $x$.
8. Trouvez une fonction telle que $\left|\int_{a}^{b} f(t)\,dt\right| = \int_{a}^{b} \left|f(t)\right|\,dt$
9. Trouvez une fonction $f$ telle que $\left|\int_{a}^{b} f(t)\,dt\right| < \int_{a}^{b} \left|f(t)\right|\,dt$
10. Trouvez une *condition nécessaire et suffisante* sur $f$ pour que $\left|\int_{a}^{b} f(t)\,dt\right| = \int_{a}^{b} \left|f(t)\right|\,dt$
11. **Vrai ou faux ?** $\int_{2}^{3} xt^2\,dt = \int_{2}^{3} xt^2\,dx$
12. **Vrai ou faux ?** $\int_{2}^{3} xt^2\,dt = \int_{2}^{3} x^2 t\,dx$
13. Trouvez deux fonctions $f$ et $g$ continues sur $[1,2]$, distinctes, telles que $\int_{1}^{2} f(t)\,dt = \int_{1}^{2} g(u)\,du$
14. **Vrai ou faux ?** Si $f$ est bornée sur $[a,b]$, alors la fonction $x \mapsto \int_{a}^{x} f(u)\,du$ l'est aussi.
15. **Vrai ou faux ?** Si $f$ est croissante sur $[a,b]$, alors la fonction $x \mapsto \int_{a}^{x} f(u)\,du$ l'est aussi.
16. Déterminez une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2 et dont la valeur moyenne sur $[-2\,;\,2]$ est 0.

**Exercice 15** : Démontrer que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin t|\,dt = 2$$

[1]

1. On utilisera la relation de Chasles afin de supprimer les valeurs absolues.

**Exercice 16** : Calculer la valeur moyenne de la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[e;e^2]$ par

$$f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}$$

**Exercice 17** : La capacité pulmonaire de l'être humain suivant son âge $x$ de 10 à 90 ans, s'exprime, en litres, au moyen de la fonction $f$ définie par $f(x)=\dfrac{110(\ln x-2)}{x}$
Déterminer la valeur moyenne de la capacité pulmonaire entre 20 et 70 ans, à 0,1 litre près par défaut.

**Exercice 18** : On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx$

1. **a.** Montrer que $u_0+u_1=1$.

   **b.** Calculer $u_1$ puis montrer que $u_1=\ln\left(\dfrac{2}{e+1}\right)+1$.

   **c.** En déduire $u_0$.
2. **a.** Montrer que pour tout entier $n\geq 1$ on a

$$u_{n+1}+u_n=\frac{1-e^{-n}}{n}$$

   **b.** En déduire les valeurs de $u_2$ et $u_3$.
3. On souhaite calculer $u_n$ pour $n\geq 2$.
   On propose l'algorithme ci-contre.
   Expliquer pourquoi celui-ci est incorrect, puis le corriger de façon à résoudre le problème.

**Algorithme 1 :**

**Entrée(s) :**
$n$ un entier naturel
**Variable(s) :**
$u$ est un nombre réel.
$k$ est un entier naturel.
**Début**
  $u\longleftarrow \ln\left(\dfrac{2}{e+1}\right)+1$
  **Pour** $k$ allant de 2 à $n$ **Faire**
    $u\longleftarrow \dfrac{1-e^{-k}}{k}$
  **Fin Pour**
  Renvoyer $u$
**Fin**

4. On utilise le tableur pour calculer les premiers termes de la suite $(u_n)$.

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | n | u(n) |
| 2 | 0 | =LN((EXP(1)+1)/2) |
| 3 | 1 | =LN(2/(EXP(1)+1))+1 |
| 4 | 2 | |

   **a.** Parmi les formules suivantes, laquelle faut-il enter en B4 de façon à obtenir $u_2$ ?
   =(1-EXP(-A4))/A4-B3 =(1-EXP(-A3))/A4-B3 =(1-EXP(-A3))/A3-B3

   **b.** On a recopié la formule vers le bas et calculé les 100 premiers termes de la suite $(u_n)$.
   On donne la fin du tableau des résultats à $10^{-5}$ près.

| $n$ | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u(n)$ | 0.00541 | 0.00535 | 0.00529 | 0.00524 | 0.00518 | 0.00513 | 0.00508 | 0.00502 |

   Que peut-on conjecturer sur le comportement de la suite $(u_n)$ à l'infini ?
5. **a.** En utilisant la question 2a), montrer que pour tout $n\geq 1$ on a $0\leq u_n\leq\dfrac{1-e^{-n}}{n}$

   **b.** En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

   **c.** Rémi affirme que pour tout entier $n\geq 100$, on a : $u_n\leq 0.1$.
   A-t-il raison ?

# IV ) Annales Cha

**Exercice 19** : Soit $k$ un entier strictement positif.

1. Justifier l'inégalité $\displaystyle\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)dx \geq 0$
2. En déduire que $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k}$
3. Démontrer alors l'inégalité $\ln(k+1)-\ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$

**Exercice 20** : **7 points**

Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

**Partie A**

1. Étudier les variations de la fonction $f$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

**Partie B**

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à termes positifs définie par :

$$u_1 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_{n+1} = f(u_n) = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}.$$

1. Démontrer que, pour tout réel $x$ positif, $\ln(1+x) \leqslant x$.
   On pourra étudier la fonction $g$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x - \ln(1+x)$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $\ln(n+1) \leqslant \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $f[\ln(n)] = \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.
4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $\ln(n) \leqslant u_n$.
5. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geq 2$, $u_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n-1}$.
6. **a.** Démontrer que, pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 2, on a $\displaystyle\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

   **b.** En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, on a $u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)$.
7. Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on a montré que $\ln(n) \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)$.
   Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1.

**Exercice 21** : **2 points**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x-1} + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Le graphique donné en **Annexe 1** représente la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

**1.** Construire sur ce graphique la droite $\Delta$ d'équation $y = 2x$. On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite $\Delta$. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ limité par la courbe $\mathscr{C}$ la droite $\Delta$, la droite d'équation $(x = 1)$ et l'axe des ordonnées.

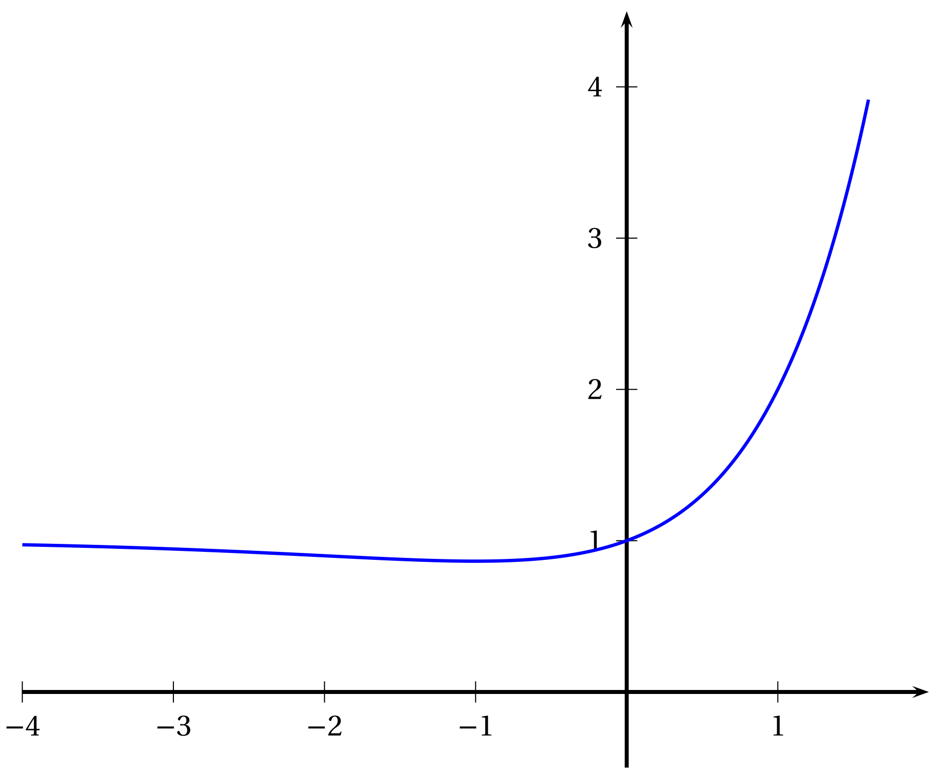
**2.** **a.** Montrer qu'il existe deux réels $c$ et $d$ tels que la fonction

$$\mathrm{H} : x \longmapsto (cx + d)e^{x-1}$$

soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $h : x \longmapsto xe^{x-1}$.

**b.** On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x-1}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\mathrm{I} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

**3.** En déduire la valeur exacte (en unités d'aire) de l'aire du domaine $\mathscr{D}$.



**Exercice 22** : **5 points**

On considère la suite $(\mathrm{I}_n)$ définie pour $n$ entier naturel non nul par :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. **a.** Soit $g$ la fonction définie par $g(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.
   Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{G}(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g$.

   **b.** En déduire la valeur de $\mathrm{I}_1$.

   **c.** Pour tout entier naturel $n$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $\mathrm{H}_n$ par $\mathrm{H}_n(x) = x^{n+1}\mathrm{G}(x)$.

   i. Montrer que $\mathrm{H}_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer pour tout réel $x$, $\mathrm{H}'_n(x)$

   ii. En déduire que pour tout entier naturel $n$ :

   $$\frac{1}{2}\mathrm{e} = \frac{n+1}{2}\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+2}$$

   **d.** Calculer $\mathrm{I}_3$ et $\mathrm{I}_5$.

2. On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Initialisation | Affecter à $n$ la valeur 1<br>Affecter à $u$ la valeur $\frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1}{2}$ |
| | Tant que $n < 21$<br>Affecter à $u$ la valeur $\frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2}u$<br>Affecter à $n$ la valeur $n+2$ |
| **Sortie** | Afficher $u$ |

   Quel terme de la suite $(\mathrm{I}_n)$ ontient-on en sortie de cet algorithme ?

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$, $\mathrm{I}_n \geqslant 0$.

   **b.** Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)$ est décroissante.

   **c.** En déduire que la suite $(\mathrm{I}_n)$ est convergente. On note $\ell$ sa limite.

4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer la valeur de $\ell$.

**Exercice 23** : 6 points

**Partie A :**

On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$$

1. Étudier les variations de la fonction $g$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2. Justifier qu'il existe un unique réel $\alpha$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   Donner une valeur approchée de $\alpha$, arrondie au centième.

3. En déduire le signe de la fonction $g$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

**Partie B :**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

1. Déterminer les limites de la fonction $f$ en 0 et en $+\infty$.
   Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\Delta : y = 2x$.
2. Justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction $f$.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. On prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

**Partie C :**

Soit $n$ un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine $\mathscr{D}$ du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\Delta$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$.

1. Justifier que cette aire, exprimée en cm$^2$, est donnée par :

$$\mathrm{I}_n = 2\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

2. Soit $h$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
   - **a.** Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in ]0;+\infty[$.
   - **b.** En déduire $\displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$
   - **c.** En déduire l'expression de $\mathrm{I}_n$ en fonction de $n$.
3. Calculer la limite de l'aire $\mathrm{I}_n$ du domaine $\mathscr{D}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

# V ) Anciennes Annales

**Exercice 24** : **5 points**

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur $[0;1]$ telle que :

$$f(0)=0 \text{ et } f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \text{ pour tout } x \text{ de } [0;1]\text{B}.$$

*On ne cherchera pas à déterminer $f$.*

**PARTIE A.**

**1.** Déterminer le sens de variation de $f$ sur $[0\,;\,1]$.

**2.** Soit $g$ la fonction définie sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ par $g(x)=f\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)$.

*La fonction* $\frac{\sin}{\cos}$ *est appelé tangente et notée* tan.

**a.** Justifier que $g$ est dérivable sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$, puis que, pour tout $x$ de $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$, $g'(x)=1$.

**b.** Montrer que, pour tout $x$ de $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$, $g(x)=x$, en déduire que $f(1)=\frac{\pi}{4}$.

**3.** Montrer que, pour tout $x$ de $[0\,;\,1]$, $0\leq f(x)\leqslant\frac{\pi}{4}$.

**PARTIE B.**

Soit $(I_n)$ la suite définie par $I_0=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ et, pour tout entier naturel $n$ non nul, $I_n=\int_0^1 x^n f(x)dx$.

**1.** Soit $h$ la fonction définie sur $[0;1]$ par $h(x)=xf(x)$.

**a.** Calculer $h'(x)$ pour tout $x$ de $[0;1]$ .

**b.** Montrer que $\mathrm{I}_0=h(1)-h(0)-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$ .

**c.** En déduire que $\mathrm{I}_0=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(2)$ .

**2.** **a.** Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$, $I_n\geqslant 0$.

**b.** Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$, $I_n\leqslant\frac{\pi}{4(n+1)}$.

**c.** En déduire la limite de la suite $(I_n)$.

**Exercice 25** : 6 points

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=\ln\left(1+x\mathrm{e}^{-x}\right).$$

On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthogonal. La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

**PARTIE I**

**1.** Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

**2.** Justifier que pour tout nombre réel positif $x$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$.

**3.** Etudier les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

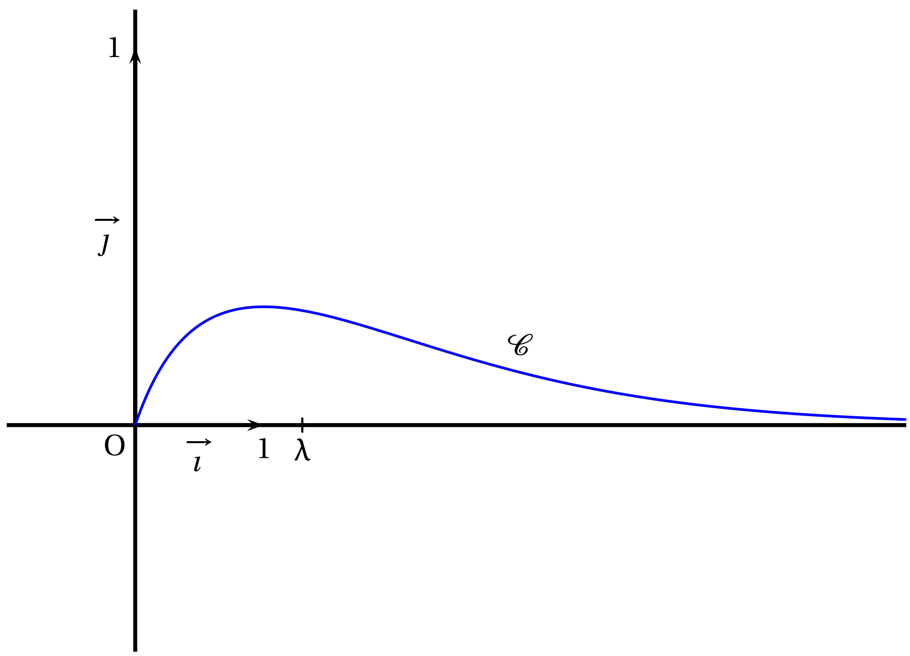
**PARTIE II**

Soit $\lambda$ un nombre réel strictement positif. On pose $\mathscr{A}(\lambda)=\displaystyle\int_0^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x$. On se propose de majorer $\mathscr{A}(\lambda)$ .

**1.** Représenter, sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie), la partie du plan dont l'aire en unité d'aire, est égale à $\mathscr{A}(\lambda)$.

**2.** Justifier que pour tout nombre réel $\lambda$ strictement positif, $\mathscr{A}(\lambda)\leqslant\lambda\times f(1)$.

**3. Application numérique**
Avec chacune des deux méthodes, trouver un majorant de $\mathscr{A}(5)$, arrondi au centième. Quelle méthode donne le meilleur majorant dans le cas où $\lambda=5$ ?




**EXERCICE 3** **6 points**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\ln\left(\mathrm{e}^{x}+2\mathrm{e}^{-x}\right).$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction $f$ dans un repére orthogonal est donnée en annexe.

**Partie A - étude de fonction $f$.**

**1.** Montrer que, pour tout réel $x$, $f(x)=x+\ln\left(1+2\mathrm{e}^{-2x}\right)$.
On admet que, pour tout réel $x$, $f(x)=-x+\ln\left(2+\mathrm{e}^{2x}\right)$.

**2.** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

**3.** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

**4.** Etudier les variations de la fonction $f$.

Montrer que le minimum de la fonction $f$ est égal à $\dfrac{3}{2}\ln 2$.

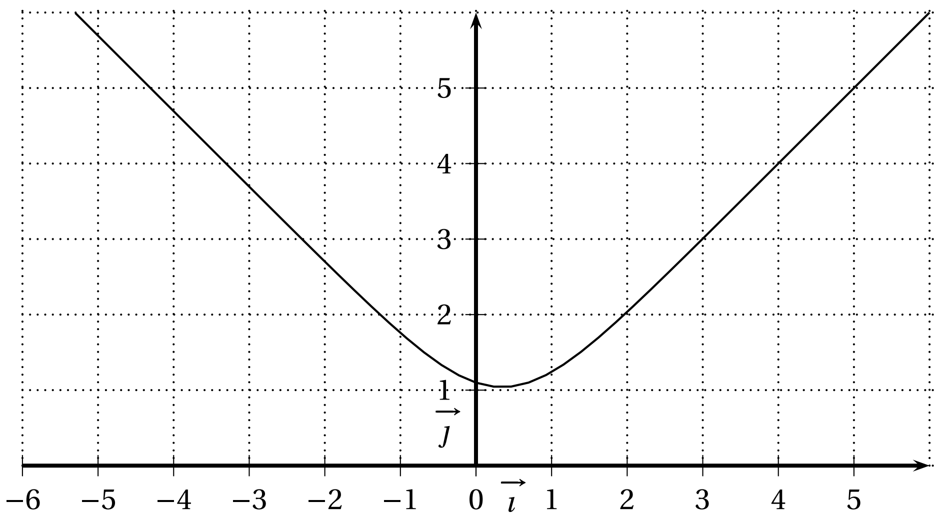
**Partie B - Encadrement d'une intégrale.**

On pose $\text{I} = \displaystyle\int_2^3 [f(x) - x]\,\text{d}x$.

**1.** Donner une interprétation géométrique de I.

**2.** Montrer que, pour tout $\text{X} \in [0\,;\,+\infty[$, $\ln(1+\text{X}) \leqslant \text{X}$.

**3.** En déduire que $0 \leqslant \text{I} \leqslant \displaystyle\int_2^3 2\text{e}^{-2x}\,\text{d}x$ et donner un encadrement de I d'amplitude 0,02.




**Exercice 4** **5 points**

**Partie A : Restitution organisée de connaissances**

On supposera connus les résultats suivants :
Soient $u$ et $v$ deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\text{d}x \geqslant 0$.
- Pour tous réels $\alpha$ et $\beta$, $\displaystyle\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\,\text{d}x = \alpha\int_a^b u(x)\,\text{d}x + \beta\int_a^b v(x)\,\text{d}x$.

Démontrer que si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$ et si, pour tout $x$ de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\text{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\text{d}x$.

**Partie B**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \text{e}^{-x^2}$ et on définit la suite $(u_n)$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x = \int_0^1 \text{e}^{-x^2}\,\text{d}x \\ \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\text{d}x = \int_0^1 x^n\text{e}^{-x^2}\,\text{d}x \end{cases}$$

**1.** **a.** Démontrer que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $\dfrac{1}{\text{e}} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

**b.** En déduire que $\dfrac{1}{\text{e}} \leqslant u_0 \leqslant 1$.

**2.** Calculer $u_1$.

**3.** **a.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant u_n$.

**b.** Etudier les variations de la suite $(u_n)$.

**c.** En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

**4.** **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

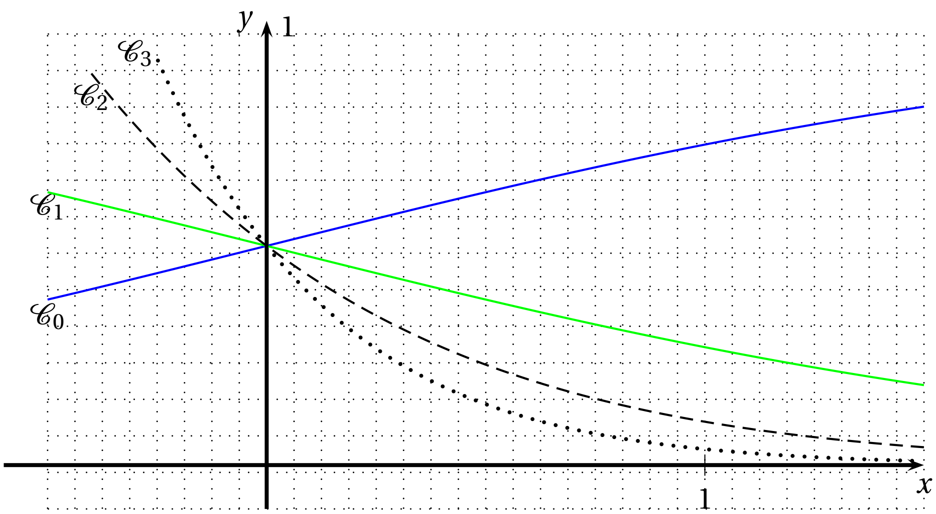
**b.** En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**EXERCICE 5** **6 points**

Soit $n$ un entier naturel.
On note $f_n$, la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont représentées ci-dessous :




**Partie A :** *Quelques propriétés des fonctions $f_n$ et des courbes $\mathscr{C}_n$*

**1.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$ les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point A en commun. On préciser ses coordonnées.

**2.** Etude de la fonction $f_0$

**a.** étudier le sens de variation de $f_0$.

**b.** Préciser les limites de la fonction $f_0$ en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.

**c.** Dresser le tableau de variation de fonction $f_0$ sur $\mathbb{R}$.

**3.** Etude de la fonction $f_1$

**a.** Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel $x$.

**b.** En déduire les limites de la fonction $f_1$ en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.

**c.** Donner une interprétation géométrique de 3. a. pour les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

**4.** Etude de la fonction $f_n$ pour $n \geqslant 2$

**a.** Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel $x$, on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{(n-1)x}}.$$

**b.** Etudier les limites de la fonction $f_n$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

**c.** Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction $f_n$ sur $\mathbb{R}$.

**Partie B :** *étude d'une suite liée aux fonctions $f_n$*

On pose, pour tout entier naturel $n$ : $\quad u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

**1.** Calculer $u_1$ puis montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire $u_0$.

**2.** Démontrer que, pour tout entier $n$ : $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

**3.** Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et préciser sa limite.

**Exercice 26** : **Partie A** On considère la fonction nutnérique $f$ de la variable réelle $x$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}\mathrm{e}^{1-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe representative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**1.** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

*On pourra pour cela justifier et exploiter l'écriture pour tout x réel strictement positif :* $f(x) = \dfrac{e}{\sqrt{x}} \times \dfrac{x}{e^x}$.

Interpréter graphiquement le résultat.

**2.** Démontrer que $f$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ puis calculer $f'(x)$.

**3.** Déduire des questions précédentes le tableau de variation de $f$.

**4.** Construire la courbe $\mathscr{C}$ (unité graphique : 2 cm). On admettra que $\mathscr{C}$ est tangente en O à l'axe des ordonnées.

**Partie B** On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ non nul par : $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

**1.** Interpréter géométriquement $u_n$.

**2.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$ non nul : $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$.

**3.** En déduire que la suite $(u_n)$ est décroissante.

**4.** Prouver la convergence de la suite $(u_n)$ et déterminer sa limite.

**Partie C** On considère la fonction numérique F de la variable réelle $x$ définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par :

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**1.** **a.** Démontrer que F est dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ et calculer $\mathrm{F}'(x)$.

**b.** En déduire le sens de variations de F.

**2.** **a.** Démontrer que pour tout réel $t$ positif : $t + 2 \geqslant 2\sqrt{2}\sqrt{t}$.

**b.** En déduire que pour tout $x$ de l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ :

$$\mathrm{F}(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^x (t+2)\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

**c.** Soient $g$ et $h$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = -(t+3)e^{1-t}$ et $h(t) = (t+2)e^{1-t}$.

**d.** En déduire que pour tout $x$ appartenant à $[1\ ;\ +\infty[$ : $0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \sqrt{2}$.

**3.** On note, pour tout entier naturel $n$ non nul, $\mathrm{S}_n$ la somme des $n-1$ premiers termes de la suite $(u_n)$. Exprimer $\mathrm{S}_n$ à l'aide d'une intégrale. Montrer que la suite $(\mathrm{S}_n)$ converge et donner un encadrement de sa limite.

**Exercice 27** : Les questions sont indépendantes. II est demandé de justifier toutes les réponses fournies.

**1.** Dans chacun des cas suivants, proposer une fonction $f$ qui vérifie les propriétés données. On donnera l'expression de $f(x)$.

**a.** $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\mathrm{e}^{2x} + b\mathrm{e}^{x} + c$, la limite de $f$ en $+\infty$ est $+\infty$ et l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, 0 et $\ln 2$.

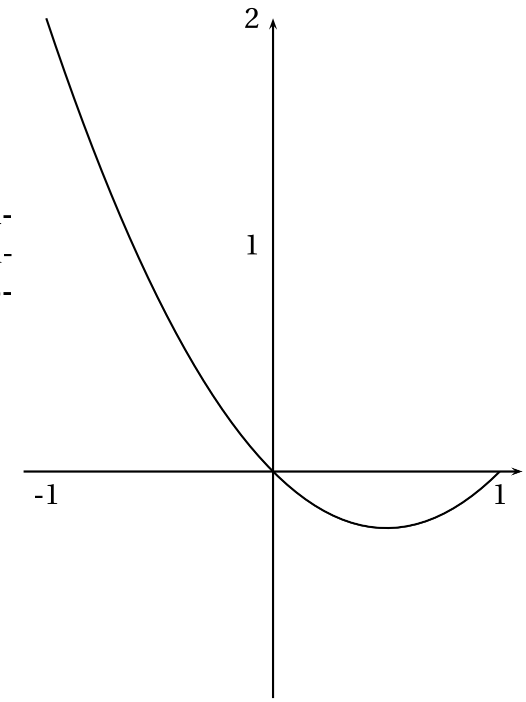
**b.** $f$ est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$, $f(2) = 4$ et, pour tout $x$ et tout $y$ réels strictement positifs, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

**c.** $f$ est une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2 et la valeur moyenne de $f$ sur $[-2\ ;\ 2]$ est 0.

**2.** Soit $g$ une fonction définie et dérivable, de dérivée $g'$ continue sur $[-1\ ;\ 1]$. La courbe représentative de $g$ est donnée ci-dessous. Les affirmations suivantes sont-elles cohérentes avec le schéma :

**a.** $\displaystyle\int_0^1 g'(x)\,\mathrm{d}x = 0$ ?

**b.** $\displaystyle\int_0^1 g'(x)\,\mathrm{d}x \geqslant -\frac{1}{2}$ ?




**Exercice 28** :

On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

**1.** Montrer que la fonction $f\ :\ t \longmapsto (2-t)\mathrm{e}^t$ est une primitive de $g\ :\ t \longmapsto (1-t)\mathrm{e}^t$ sur $[0\ ;\ 1]$. En déduire la valeur de $u_1$.

**2.** Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n \geqslant 0$.

**3. a.** Montrer que pour tout réel $t$ de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et pour tout entier naturel non nul $n$

$$(1-t)^n \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e} \times (1-t)^n.$$

**b.** En déduire que pour tout $n$ non nul, $u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.

**4.** Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice 29** : On considère les fonctions $f$ et $g$ définies, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, par

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$ dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$. Ces courbes sont tracées sur la feuille annexe, dont le candidat disposera comme il le jugera utile ; cette annexe sera à joindre à la copie, avec les éventuels ajouts effectués par le candidat.

**1.** Vérifier que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune au point $\mathrm{O}(0\,;0)$.
Préciser la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente.

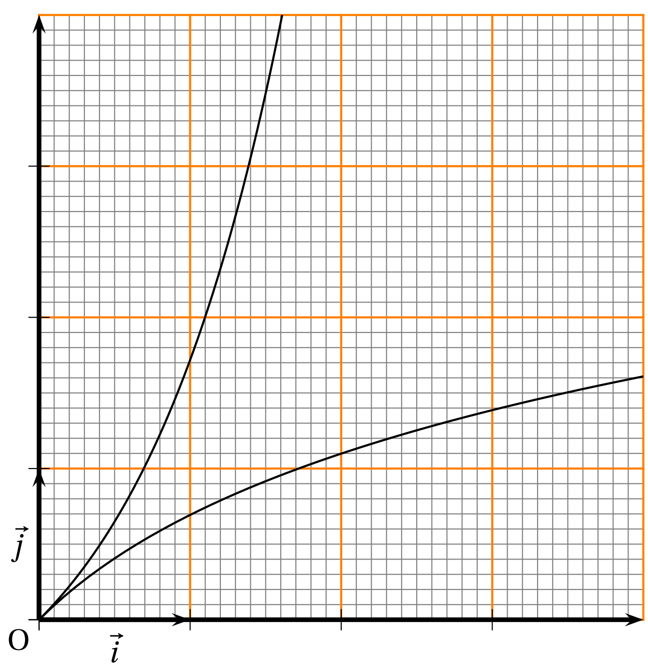
**2.** Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

**3.** Soit $a$ un nombre réel strictement positif. On se propose de calculer le nombre $\mathrm{I}(a) = \displaystyle\int_0^a \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

**a.** En utilisant des considérations d'aires, démontrer que

$$\mathrm{I}(a) = a\ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} \left(\mathrm{e}^x - 1\right)\mathrm{d}x.$$

**b.** En déduire la valeur de $\mathrm{I}(a)$.



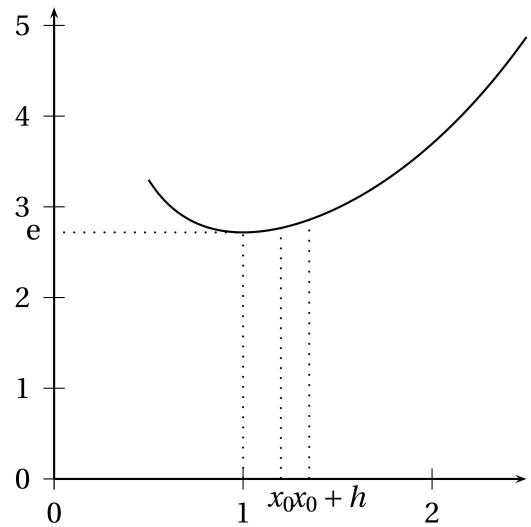

**Exercice 1.** On considère la fonction $f$, définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{t}.$$

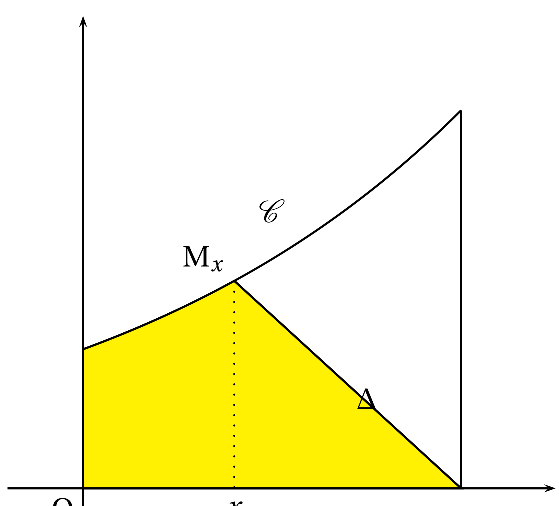
**1.** **a.** Justifier la continuité de $f$ sur $[1\,;\,+\infty[$.

**b.** Montrer que $f$ est croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

2. **Restitution organisée de connaissances** On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni. Pour tout réel $x_0$ de $[1\,;\,+\infty[$, on note $\mathscr{A}(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant $f$ dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=x_0$. On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $[1\,;\,+\infty[$ est une primitive de $f$.
   - **a.** Que vaut $\mathscr{A}(1)$ ?
   - **b.** Soit $x_0$ un réel quelconque de $[1\,;\,+\infty[$ et $h$ un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :
   $$f(x_0) \leqslant \frac{\mathscr{A}(x_0+h)-\mathscr{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h).$$
   - **c.** Lorsque $x_0>1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h<0$ et tel que $x_0+h \geqslant 1$ ?
   - **d.** En déduire la dérivabilité en $x_0$ de la fonction $\mathscr{A}$ ainsi que le nombre dérivé en $x_0$ de la fonction $\mathscr{A}$.
   - **e.** Conclure.




**Exercice 2.** Le plan est rapporté à un repère orthonormal. On note I le point de coordonnées $(1\,;\,0)$. Soient $f$ une fonction positive, strictement croissante et dérivable sur $[0\,;\,1]$, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et $\Delta$ la portion de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$. Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'un unique réel $\alpha$ appartenant à $[0\,;\,1]$ tel que, si A est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $\alpha$, le segment [IA] partage $\Delta$ en deux régions de même aire. Pour tout $x$ appartenant à $[0\,;\,1]$ on note $M_x$ le point de coordonnées $\big(x,\ f(x)\big)$ et $T_x$ le domaine délimité par la droite $IM_x$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe $\mathscr{C}$. On désigne par F la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et par $g(x)$ l'aire de $T_x$.




C. Aupérin
c.auperin@wicky-math.fr.nf

1. Exprimer, pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, $g(x)$ en fonction de $x$, $f(x)$ et $\mathrm{F}(x)$.
2. **Démonstration de cours** Démontrer que F est dérivable et a pour dérivée $f$.
3. Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto g(x)$ sur $[0\,;\,1]$.
4. **a.** Par des considérations d'aires, montrer que $g(0) \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

   **b.** Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha$ de $[0\,;\,1]$ tel que $g(\alpha)$ soit égal à la moitié de l'aire de $\Delta$.