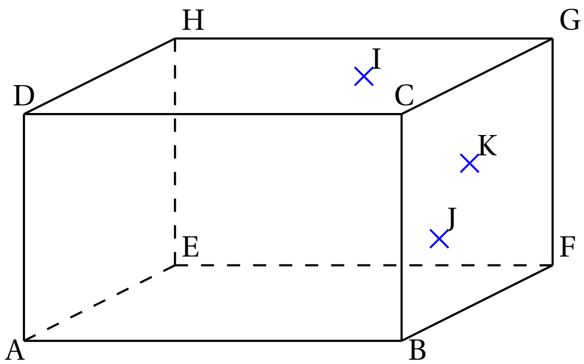
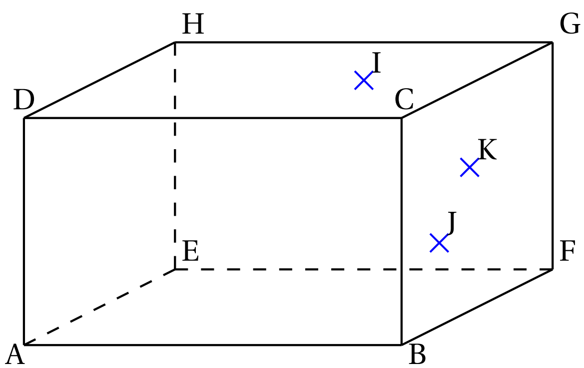
Exercices : Les vecteurs à la conquête de l'espace

Exercice 1 :



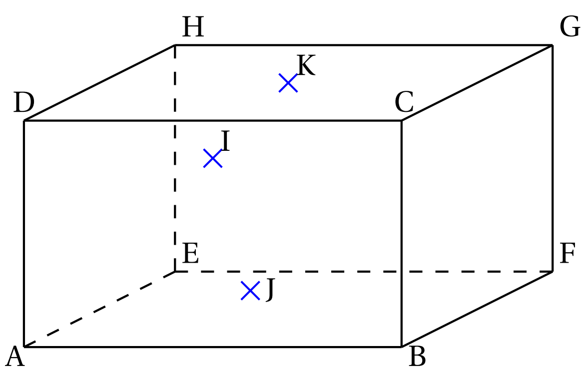
On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que J et K sont dans (BFG) et I ∈ (CDH), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 2 :



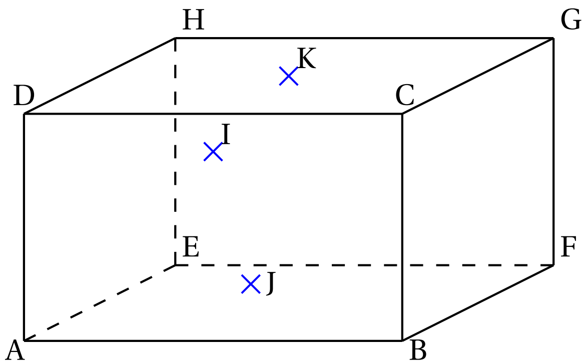
On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que J et K sont dans (EFG) et I ∈ (CDH), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 3 :



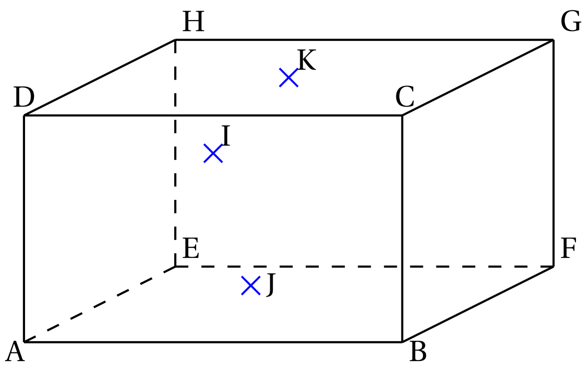
On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que I et J sont dans (ABC) et K ∈ (DCG), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 4 :



On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que I et J sont dans (ABC) et K ∈ (EFG), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 5 : **(Pour les experts)**

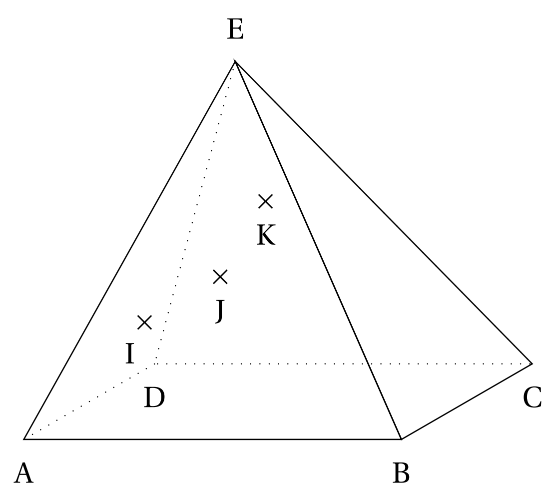


On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que I et K sont dans (EFG) et J ∈ (ABF), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 6 :

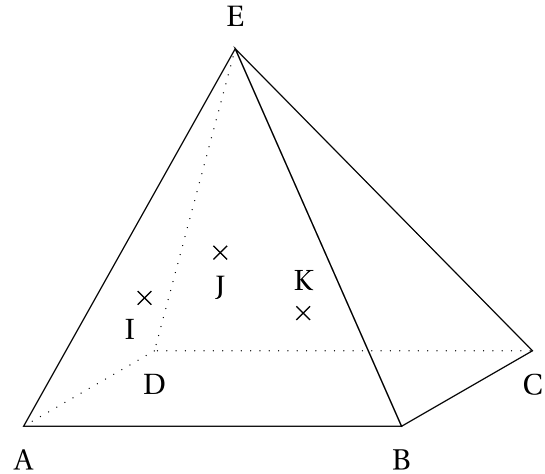
On considère une pyramide de base ABCD et de sommet principal E, et I et J deux points de la face ABE et K un point de la face CDE, comme sur la figure ci-contre.
On se propose de tracer l'intersection de (IJK) et de (ABCDE).

1. Pouvez-vous le faire sans indication supplémentaire ?
2. **a.** Caractériser l'intersection (Δ) des plans (ABE) et (CDE).
   La tracer.
   b. Placer $L = (IJ) \cap (\Delta)$. Donner trois plans auxquels L appartient.
   c. En déduire $(IJK) \cap (CDE)$.
3. Tracer l'intersection de (IJK) et de la pyramide.



Exercice 7 : **(Pour les experts)**

On considère une pyramide de base ABCD et de sommet principal E, et I et J deux points de la face ABE et K un point de la face CDE, comme sur la figure ci-contre.
On se propose de tracer l'intersection de (IJK) et de (ABCDE).



1. **a.** (Δ) est la droite qui passe par E et parallèle à (AB) et (CD), d'après le théorème du toit.
   b. Le point L appartient aux plans (IJK) car L ∈ (IJ), et aux plans (ABE) et (CDE) car L ∈ Δ
   c. En déduire (IJK) ∩ (CDE). La tracer
2. **a.** Placer M = (IJ) ∩ (ABC).
   b. En déduire (IJK) ∩ (ABC).
3. Tracer l'intersection de (IJK) et de la pyramide.

Exercice 8 : Soit ABCDEFGH un pavé droit. Soit N et M deux points respectivement situés sur les arêtes [AD] et [AB]. Tracer la section du pavé ABCDEFGH par le plan (MNG) à l'aide du logiciel géogébra.

Exercice 9 : Démontrons par l'absurde le théorème du toit vu en seconde et rappeler cette année. On rappelle que l'on considère deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sécants selon une droite Δ. De plus, on sait qu'une droite d de $\mathscr{P}$ est parallèle à une droite d' de $\mathscr{P}'$. Pour raisonner par l'absurde, on suppose de plus que Δ n'est pas parallèle à d et d'.
On désigne par $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ.

1. Expliquer pourquoi ce vecteur $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{P}'$.
2. Expliquer pourquoi il existe un vecteur $\vec{v}$ non nul directeur de d et d'.
3. Expliquer pourquoi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
4. Expliquer pourquoi ce vecteur $\vec{v}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{P}'$.
5. En déduire une contradiction et conclure.

Exercice 10 : ABCD est un tétraèdre. Le point I est le milieu de [CD] et le point K est défini par

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

1. Faire une figure et placer K.
2. Exprimer $\overrightarrow{BI}$ puis $\overrightarrow{BK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
3. En déduire que les points B, K et I sont alignés.

Exercice 11 : ABCDEFGH est un cube. M et L sont les points tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{ML} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DH}$

2. En déduire la position de la droite (ML) par rapport au plan (DBH)

Exercice 12 : ABCDEFGH est un cube. I, J et K sont les milieux respectifs de [AB], [CD] et [EF].

1. Démontrer que la droite (CK) est parallèle au plan (IJH)

2. Démontrer que les plans (IJH) et (BCK) sont parallèles

Exercice 13 : SABCD est une pyramide à base carré ABCD. Le point O est le centre de ABCD. J est le milieu de [SO]. Le point K est tel que $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$

1. Justifier que S, B, D, O, J et K sont coplanaires.

2. **a.** Démontrer que $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{SB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$

b. Justifier que $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}\right)$ et en déduire que $\overrightarrow{BJ} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{SD}$

c. Montrer que B, J et K sont alignés.

3. Positions relatives de plans

a. Etudier la position relative du plan (BJC) avec le plan (ABC) et avec le plan (SCD).

b. Etudier la position relative des plans (BJC) et (SAD).

c. Construire la section de la pyramide SABCD par le plan (BJC). Ne pas justifier.

Exercice 14 : Dans un repère de l'espace, on considère les points $E(2;-3;5)$, $F(0;-1;1)$, $H(1;-8;8)$ et la droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 4-t \\ z = -2+2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que d et (EF) sont strictement parallèles.

2. Montrer que d et (EH) sont sécantes et préciser leur point d'intersection K.