EXERCICES : DIVERS RAISONNEMENTS MATHÉMATHIQUES

Exercice 1 : On définit sur $\mathbb{N}^*$ la suite (u_n) de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$.
On considère la proposition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \text{ on a } u_n < \varepsilon$$

1. Traduire cette phrase mathématique en français.
2. On choisit $\varepsilon = 1$.
   a. Trouver un rang p telle que $u_p < \varepsilon$.
   b. Montrer que pour tout $n \geq p$ on a $u_n < \varepsilon$
   c. Conclure par rapport à la proposition donnée dans ce cas particulier.
3. Même question pour $\varepsilon = 0.1$, 0.01 et 10^{-6}.
4. Peut-on conclure que la proposition est vraie ?
5. Démontrer cette proposition dans le cas général (ie pour ε quelconque).

Exercice 2 : *On rappelle que* $\forall n \in \mathbb{N}$, *n pair* $\iff$ n^2 *pair.*
Montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est-à-dire qu'il ne s'écrit pas sous la forme d'un quotient d'entiers $\dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.

Exercice 3 : On donne ci-dessous trois propositions vraies.

1. Pour tout entier $n \geq 4$, $2^n > n^2$
2. Pour tout réel $x > 0$, $(x+1)^3 \geq 1+3x$
3. Pour tout entier $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = 2n^4 - n^2$

Pour lesquelles peut-on envisager une démonstration par récurrence (que l'on ne fera pas) ?

Exercice 4 : La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 - 2^n$

Exercice 5 : Considérons la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^n$

Exercice 6 : On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et pour tout n par la relation $u_{n+1} = 3u_n + 1$. Démontrer chacune des propositions suivantes.

1. La proposition « $u_n \leq u_{n+1}$ » est héréditaire.
2. La proposition « $u_n \geq u_{n+1}$ » est héréditaire.
3. Si $u_0 = 1$ la suite u est croissante.
4. Si $u_0 = -2$, la suite u est décroissante.
5. Su $u_0 = -0.5$, la suite u est stationnaire.

Exercice 7 :

1. Montrer que les deux propositions suivantes sont héréditaires
(A) : « $10^n - 1$ est un multiple de 9 » (B) : « $10^n + 1$ est un multiple de 9 »
2. Sont-elles vraies pour tout entier naturel n ?

Exercice 8 :

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. On s'intéresse désormais à la somme S_n des cubes des n premiers entiers naturels impairs.
   a. Calculer S_1, S_2 et S_3.
   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $S_n = 2n^4 - n^2$
   c. Quel est l'entier n pour lequel $S_n = 41328$?

Exercice 9 : Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = nx^{n-1}$

Exercice 10 : Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, l'**inégalité de Bernoulli** est vraie :

$$\forall x > 0 \text{ , on a } (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Exercice 11 :

1. Rappeler ce que signifie l'écriture $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ pour n et k entiers tels que $0 \leq k \leq n$.
2. Compléter la propriété suivante, vu en première :
Pour tous n et k entiers tels que $0 \leq k \leq n$, on a $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} =$
3. Ecrire les 5 premières lignes du triangle de Pascal.
4. Démontrer que pour tous réels a et b on a
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
5. Quel lien observe-t-on entre les coefficients de développement et le triangle de Pascal ?
6. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ on a :
$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k$$
formule appelée **formule du binôme de Newton**.
7. *Application* : développer $(a+b)^5$ sans calcul.