Exercice 2 :

Partie A :

$z+2i=iz-1$

$\Leftrightarrow z-iz=-1-2i$

$\Leftrightarrow (1-i)z=-1-2i$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{-1-2i}{1-i}=\dfrac{(-1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{-1-2i-i-2i^2}{1^2+1^2}=\dfrac{-1+2-3i}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$

$13z^2+6z+1=0$

$\Delta=36-4\times 13=36-52=-16$ donc il ya deux solution complexes non réelles conjuguées :

$z_1=\dfrac{-6+i\sqrt{16}}{2\times 13}=\dfrac{-6+4i}{26}=-\dfrac{3}{13}+\dfrac{2}{13}i$

$z_2=\overline{z_1}=-\dfrac{3}{13}-\dfrac{2}{13}i$

Partie B :

1. a. $f(iy)=(iy)^4-6(iy)^3+14(iy)^2-24(iy)+40=y^4+6iy^3-14y^2-24iy+40$

$= y^4-14y^2+40+(6y^3-24y)i=y^4-14y^2+40+6y(y^2-4)i$

b. $f(iy)=0+0i \Leftrightarrow y^4-14y^2+40=0=0$ et $6y(y^2-4)=0$

Concernant la partie imaginaire :

$6y(y^2-4)=0 \Leftrightarrow 6y=0$ ou $y^2-4=0$

$\Leftrightarrow y=0$ ou $y^2=4$

$\Leftrightarrow y=0$ ou $y=2$ ou $y=-2$

Concernant la partie réelle, le plus simple est de tester les potentielles solutions que nous venons de trouver grace à la partie imaginaire et de conserver celles qui annulent aussi la partie réelle :

$0^4-14\times 0^2+40=40\neq 0$ donc 0 n'est pas solution.

$2^4-14\times 2^2+40=0$ donc 2 est solution.

$(-2)^4-14\times(-2)^2+40=0$ donc -2 est solution.

Il y a donc deux solutions imaginaires pures : $2i$ et $-2i$.

2. a. $(z^2+az+b)(z^2+4)=z^4+az^3+bz^2+4z^2+4az+4b$ donc necessairement $a=-6$ et $b=10$ (pour que a $z^3=-6z^3$ et $4b=40$

On aura alors bien $(z^2-6z+10)(z^2+4)=z^4-6z^3+10z^2+4z^2-24z+40=z^4-6z^3+14z^2-24z+40=f(z)$

b. $f(z)=0 \Leftrightarrow (z^2-6z+10)(z^2+4)=0$

$\Leftrightarrow z^2-6z+10=0$ ou $z^2+4=0$

pour $z^2-6z+10=0$:

$\Delta=36-40=-4$

$z_1=\dfrac{6+i\sqrt{4}}{2}=3+i$

$z_2=\overline{z_1}=3-i$

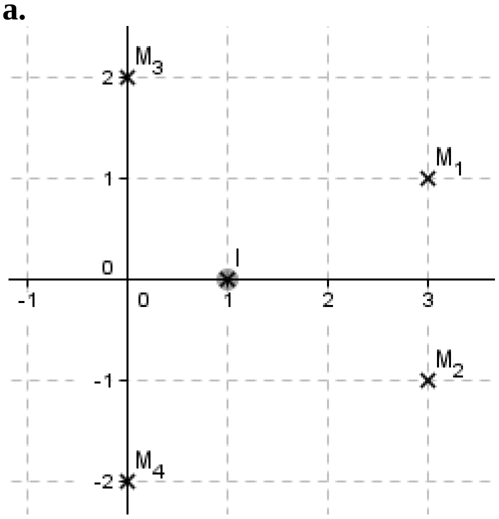
Pour $z^2+4=0$

$\Leftrightarrow z^2=-4$

$\Leftrightarrow z_3=2i$ ou $z_4=-2\mathrm{i}$

Il y a donc quatre solutions à l'équation $f(z)=0: 3+i, 3-i, 2i$ et $-2i$.

3. a.



3. b.

Calculons les distances IM_1, IM_2, IM_3 et IM_4:

$IM_1=|z_1-1|=|3+i-1|=|2+i|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$IM_2=|z_2-1|=|3-i-1|=|2-i|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

$IM_3=|z_3-1|=|2i-1|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

$IM_4=|z_4-1|=|-2i-1|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

Les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont donc tous situés à la distance $\sqrt{5}$ de I donc tous situés sur le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{5}$