DEVOIR SURVEILLÉ COMMUN : 2H

Exercice 1 : **(10 points)**

Partie A : $g(x) = e^x - xe^x + 1$ sur $\mathbb{R}$

1. • $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ d'après le cours. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0+0+1 = 1}$.

   • $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ est une forme indéterminée.
   Or $g(x) = e^x(1-x)+1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x) = -\infty$. Par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x(1-x) = -\infty$
   D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$.

2. Commençons par calculer la dérivée de g.
   Pour cela, il faut notamment calculer la dérivée du produit xe^x.
   On pose $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$. Alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$.
   Ainsi $g'(x) = e^x - \left(1\times e^x + e^x \times x\right) + 0 = e^x - e^x - xe^x$. Donc $\boxed{g'(x) = -xe^x}$
   On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
Signe de $-x$		$+$	0	$-$			
Signe de e^x		$+$		$+$			
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$			
Variations de g	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

3. **a.** Sur $]-\infty;0[$, la fonction g est supérieure à 1, donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution.
   Sur $[0;+\infty[$, la fonction g est continue et strictement décroissante.
   De plus, $g(0) = 2 > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty < 0$.
   Donc, d'après le corollaire du TVI, il existe un unique réel $\alpha \in [0;+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   Au final, l'équation $g(x) = 0$ admet bien une unique solution sur $\mathbb{R}$.

   b. Par balayage, on trouve $\boxed{1.27 < \alpha < 1.28}$

   c. On sait que $g(\alpha) = 0 \iff e^\alpha - \alpha e^\alpha + 1 = 0 \iff e^\alpha(1-\alpha) = -1 \iff e^\alpha = \dfrac{-1}{1-\alpha} \iff \boxed{e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha-1}}$

4.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de g		$+$	0	$-$	

Partie B : $\mathrm{A}(x) = \dfrac{4x}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$

1. • $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x + 1 = 0+1 = 1$. Donc par quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{A}(x) = -\infty}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x + 1 = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{A}(x)$ est une forme indéterminée.

  Or $\mathrm{A}(x) = \dfrac{x\times 4}{e^x(1+e^{-x})} = \dfrac{x}{e^x} \times \dfrac{4}{1+e^{-x}}$.

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ d'après le cours, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{1+e^{-x}} = \dfrac{4}{1+0} = 4$

  Finalement par produit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{A}(x) = 0}$.

2. On pose $u(x) = 4x$ et $v(x) = e^x + 1$. Alors $u'(x) = 4$ et $v'(x) = e^x$.

   Ainsi $\mathrm{A}'(x) = \dfrac{4\times(e^x+1) - e^x \times 4x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{4\,(e^x + 1 - xe^x)}{(e^x+1)^2}$. D'où $\boxed{\mathrm{A}'(x) = \dfrac{4g(x)}{(e^x+1)^2}}$

3.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $4g(x)$		$+$	0	$-$	
Signe de $\left(e^x+1\right)^2$		$+$		$+$	
Signe de $\mathrm{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de A	$-\infty$	$\nearrow$	$\mathrm{A}(\alpha)$	$\searrow$	0

4. Le maximum de la fonction A est donc atteint en α. Or

$$\mathrm{A}(\alpha) = \frac{4\alpha}{e^\alpha + 1} = \frac{4\alpha}{\dfrac{1}{\alpha-1}+1} = \frac{4\alpha}{\dfrac{1+\alpha-1}{\alpha-1}} = \frac{4\alpha}{\dfrac{\alpha}{\alpha-1}} = 4\alpha \times \frac{\alpha-1}{\alpha} = 4(\alpha-1)$$

Partie C : $f(x) = \dfrac{4}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}^+$

1. $\mathrm{M}(x; f(x))$ car $\mathrm{M} \in \mathscr{C}$ $\mathrm{P}(x;0)$ car $\mathrm{P} \in (\mathrm{O}x)$ et $\mathrm{Q}(0; f(x))$ car $\mathrm{Q} \in (\mathrm{O}y)$.
2. L'aire du triangle OPMQ est égale à $\mathrm{OP}\times\mathrm{OQ} = xf(x) = x \times \dfrac{4}{e^x+1} = \mathrm{A}(x)$.

   On a déjà montré que le maximum de la fonction A était atteint en $x = \alpha$ et valait $4(\alpha-1)$.
3. Le coefficient directeur de la tangente T est $f'(\alpha)$. Or $f'(x) = \dfrac{-4e^x}{(e^x+1)^2}$. Donc :

$$f'(\alpha) = \frac{-4e^\alpha}{(e^\alpha+1)^2} = \frac{-4\times\dfrac{1}{\alpha-1}}{\left(\dfrac{1}{\alpha-1}+1\right)^2} = \frac{\dfrac{-4}{\alpha-1}}{\left(\dfrac{1+\alpha-1}{\alpha-1}\right)^2} = \frac{-4}{\alpha-1}\times\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^2 = \frac{-4(\alpha-1)}{\alpha^2}$$

De plus $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\left(-\alpha; f(\alpha)\right)$. Donc le coefficient directeur de la droite (PQ) est $\dfrac{f(\alpha)}{-\alpha}$. Or :

$$\frac{f(\alpha)}{-\alpha} = \frac{4}{e^\alpha+1}\times\frac{1}{-\alpha} = \frac{4}{\dfrac{1}{\alpha-1}+1}\times\frac{1}{-\alpha} = \frac{4}{\dfrac{1+\alpha-1}{\alpha-1}}\times\frac{1}{-\alpha} = 4\times\frac{\alpha-1}{\alpha}\times\frac{1}{-\alpha} = \frac{-4(\alpha-1)}{\alpha^2} = f'(\alpha)$$

Donc $\mathrm{T}//(\mathrm{PQ})$.