DEVOIR D'ENTRAÎNEMENT 8 : CORRECTION DES MÉTHODES

Informations génrérales à retenir (surligner ?) dans l'énoncé :

- $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
- figure que l'on complétera

Informations à recopier en notations mathématiques sur votre copie, pour tout résumer :

- $A(i)$, $B(-2i)$ et $D(1)$
- AED équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)=+\frac{\pi}{3}$
- $f(z)=z'=\dfrac{2z-i}{iz+1}$

Ensuite, vous vous attaquez au problème. Les phrases en italiques ci-dessous ne sont pas nécessaires sur votre copie, elles sont là pour vous, à titre indicatif. Les calculs ne sont pas tous détaillés.

1. **Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+\mathbf{i})$.**

   Il faut traduire en terme de module et d'argument les informations que l'on a sur E.

$$\left.\begin{array}{llll} \text{On sait que} & \left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)=+\frac{\pi}{3} & \iff & \arg\left(\dfrac{z_E-z_A}{z_D-z_A}\right)=+\dfrac{\pi}{3} \\ \text{De plus, on a} & AE=AD & \text{donc} & \left|\dfrac{z_E-z_A}{z_D-z_A}\right|=\dfrac{AE}{AD}=1 \end{array}\right\} \text{ D'où } \frac{z_E-z_A}{z_D-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ (par définition).}$$

   On remplace z_A et z_D par leur valeur et on trouve

$$z_E=e^{i\frac{\pi}{3}}(1-i)+i=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-i)+i=\ldots\ldots=\frac{1}{2}(1+i)+\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+\mathrm{i})$$

2. **Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D′ associé au point D par l'application f.**

$$z_{D'}=\frac{2z_D-i}{iz_D+1}=\frac{2-i}{i+1}=\frac{2-i}{i+1}\times\frac{1-i}{1-i}=\ldots\ldots=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$$

   On utilise l'expression conjuguée de $i+1$ pour avoir un dénominateur réel ...

3. **a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, on a $\left(z'+2\mathbf{i}\right)(z-\mathbf{i})=1$.**

$$z'+2i=\frac{2z-i}{iz+1}+2i=\frac{2z-i+2i(iz+1)}{iz+1}=\ldots\ldots=\frac{i}{iz+1}$$

$$(z'+2i)(z-i)=\frac{i}{iz+1}\times(z-i)=\ldots\ldots=1$$

   b. En déduire que pour tout point M d'affixe $z (z\neq \mathbf{i})$: $\begin{cases} \mathbf{BM'}\times\mathbf{AM}=1 \\ \left(\vec{u},\overrightarrow{\mathbf{BM'}}\right)=-\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathbf{AM}}\right)+k\times 2\pi \quad \textbf{où } k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

   On traduit l'égalité précédente en terme de module et d'argument, puis on interprète en termes de longueurs et d'angles.

$$\left(z'+2i\right)(z-i)=1\Longrightarrow\left|\left(z'+2i\right)(z-i)\right|=|1|\iff|z'+2i|\times|z-i|=1\iff BM'\times AM=1$$

$$\begin{array}{rl} \left(z'+2i\right)(z-i)=1 & \Longrightarrow \arg\left(\left(\left(z'+2i\right)(z-i)\right)\right)=\arg(1)+k\times 2\pi \quad \text{où } k\in\mathbb{Z} \\ & \iff \arg(z'+2i)+\arg(z-i)=0+k\times 2\pi \quad \text{où } k\in\mathbb{Z} \\ & \iff \left(\vec{u},\overrightarrow{BM'}\right)+\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right)=k\times 2\pi \quad \text{où } k\in\mathbb{Z} \\ & \iff \left(\vec{u},\overrightarrow{BM'}\right)=-\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right)+k\times 2\pi \quad \text{où } k \text{ est un entier relatif.} \end{array}$$

4. **a. Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.**

Il suffit de montrer que $\mathrm{AE} = \mathrm{AD} = \sqrt{2}$, *or on sait déjà que* $\mathrm{AE} = \mathrm{AD}$, *donc il suffit de montrer que* $\mathrm{AD} = \sqrt{2}$

On a $\mathrm{AD} = |z_D - z_A| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Comme AED est équilatéral, on a aussi $\mathrm{AE} = \mathrm{AD} = \sqrt{2}$, donc les points D et E appartiennent bien au cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

b. En utilisant les résultats de la question 3. b., placer le point E′ associé au point E par l'application f. On laissera apparents les traits de construction.

On commence par placer les points A, B *et* D.

On construit E *au compas tel que* ADE *soit équilatéral* ***direct***.

On place D′, *par exemple grâce à son affixe déjà calculée (pour être rigoureux, il faut trouver les moitiés au compas, avec des médiatrices).*

Enfin, on place E′ *en utilisant que :*

– $\mathrm{BE'} \times \mathrm{AE} = 1 \iff \mathrm{BE'} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\mathrm{AE}}{2}$

Donc on prend la mesure de la moitié de AE *au compas (avec la médiatrice) et on trace le cercle de centre* B *et de rayon la moitié de* AE. E′ *est sur ce cercle.*

Ou alors, on constate que

$$\mathrm{BD'} \times \mathrm{AD} = 1 \iff \mathrm{BD'} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\mathrm{AD}}{2} = \mathrm{BE'}$$

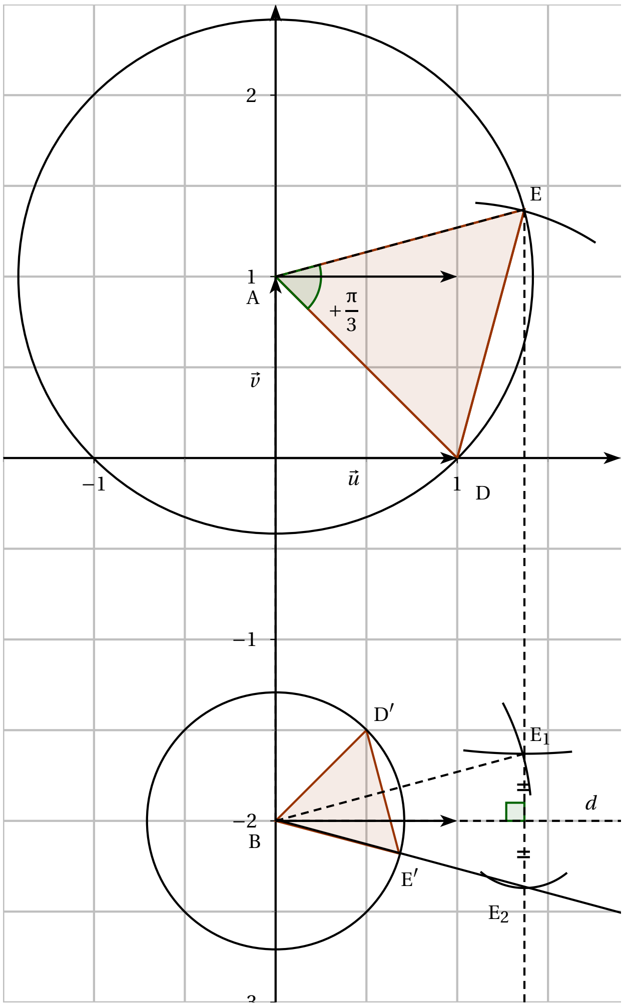
et il suffit de tracer le cercle de centre B *et de rayon* [BD′]. E′ *est sur ce cercle.*

– *Une mesure de l'angle* $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{BE'}}\right)$ *est* $-\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$

On reporte l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$ *au point* B *en construisant le parallélogramme* $\mathrm{AEE_1B}$ *au compas.*

Ensuite, pour obtenir son opposé, on construit par exemple le symétrique de $\mathrm{E_1}$ *par rapport à la droite* d *passant par* B *et de vecteur directeur* $\vec{u}$ *(remarquons que* $(\mathrm{EE_1})$ *est parallèle à* (OB) *donc perpendiculaire à* d*).*

Le point E′ *est sur* $[\mathrm{BE_2})$ *et sur le cercle déjà tracé.*



5. **Quelle est la nature du triangle BD′E′ ?**

On a déjà constaté que BD′ = BE′ donc BD′E′ est isocèle. De plus

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{\mathrm{BE'}};\overrightarrow{\mathrm{BD'}}\right) &= \left(\overrightarrow{\mathrm{BE'}};\vec{u}\right) + \left(\vec{u};\overrightarrow{\mathrm{BD'}}\right)\\
&= -\left(\vec{u};\overrightarrow{\mathrm{BE'}}\right) + \left(\vec{u};\overrightarrow{\mathrm{BD'}}\right)\\
&= \left(\vec{u};\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right) - \left(\vec{u};\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right)\\
&= \left(\vec{u};\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{BD}};\vec{u}\right)
\end{aligned}$$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{BD}};\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Donc BD′E′ est un triangle isocèle avec un angle de $\dfrac{\pi}{3}$: il est équilatéral.