

DEVOIR D'ENTRAÎNEMENT 8 : LES COMPLEXES

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 2 cm.

On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On considère les points A d'affixe i , B d'affixe $-2i$ et D d'affixe 1.

On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct, ie tel que $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}) = +\frac{\pi}{3}$.

Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z , différent de i , associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{2z - i}{iz + 1}.$$

1. Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i)$.
2. Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D' associé au point D par l'application f .
3.
 - a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de i , on a $(z' + 2i)(z - i) = 1$.
 - b. En déduire que pour tout point M d'affixe $z (z \neq i)$:

$$BM' \times AM = 1$$

$$\text{et } (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + k \times 2\pi \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

4.
 - a. Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
 - b. En utilisant les résultats de la question 3. b., placer le point E' associé au point E par l'application f . On laissera apparents les traits de construction.
5. Quelle est la nature du triangle $BD'E'$?