DEVOIR MAISON 6 : CORRECTION

Exercice 1 : 101 p 80

Partie A :

1. f est définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$
2. $\mathscr{D}: y=1$ et $\mathscr{D}_0 : x=1$

   La tangente à la courbe est horizontale en $\mathrm{A}\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right)$

3. **a.** On sait d'après le tableau que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$.

   Or on sait qu'il existe trois réels a, b, c tels que pour tout $x\neq 1$ on a $f(x)=a+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$

   Et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x-1}=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{c}{(x-1)^2}=0$ Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=a$.
   Par unicité de la limite on trouve $a=1$.

   b. On a donc $f(x)=1+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$

   Et d'après le tableau on sait que $f(0)=0 \iff 1+\dfrac{b}{-1}+\dfrac{c}{(-1)^2}=0 \iff -b+c=-1$

   De plus, on a $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{3} \iff 1+\dfrac{b}{-\frac{1}{2}-1}+\dfrac{c}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2}=-\dfrac{1}{3} \iff \dfrac{b}{-\frac{2}{3}}+\dfrac{c}{\frac{9}{4}}=-1-\dfrac{1}{3} \iff -\dfrac{2}{3}b+\dfrac{4}{9}c=-\dfrac{4}{3}$

   Donc b et c sont solutions du système donné, que l'on doit résoudre :

$$\left\{\begin{array}{ll} -b+c=-1 & (\mathrm{L}_1)\\ -\dfrac{2}{3}b+\dfrac{4}{9}c=-\dfrac{4}{3} & (\mathrm{L}_2)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} -b+c=-1 & (\mathrm{L}_1)\\ -6b+4c=-12 & (9\mathrm{L}_2)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} 6b-6c=6 & (-6\mathrm{L}_1)\\ -6b+4c=-12 & (\mathrm{L}_2)\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} 6b-6c=6 & (\mathrm{L}_1)\\ -2c=-6 & (\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} c=3 & (\mathrm{L}_2)\\ 6b-6\times 3=6 & (\mathrm{L}_1)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} c=3 & (\mathrm{L}_2)\\ b=\dfrac{6+18}{6}=4 & (\mathrm{L}_1)\end{array}\right.$$

Partie B :

1. Xcas nous donne $f'(x)=\dfrac{-2(2x+1)}{(x-1)^3}$. Etudions le signe de cette dérivée, puis les varaitions de f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		a		1		$+\infty$
-2		$-$			$-$			$-$	
$2x+1$		$-$	0		$+$			$+$	
$x-1$		$-$			$-$		0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0		$+$		‖	$-$	
f	1	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$	‖ $+\infty$	$\searrow$	1

Car $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{4}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}=1+0+0=1$

De même $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{4}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}=1+0+0=1$ (détaillé dans la partie A)

De plus, $1+\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{3}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-1)^2+4(x-1)+3}{(x-1)^2}$.
Or $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2+4(x-1)+3=3$ et $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0^+$
Par quotient, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2+4(x-1)+3}{(x-1)^2}=+\infty$.
Enfin, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{3}$ et $f(0)=0$ (on a calculé b et c pour avoir cela).

2. Il faut commencer par renommer le point, car il y a déjà u point A dans l'énoncé. Appelons ce point B. On sait que B$(0;0)$ d'après notre tableau. Alors la tangente à la courbe au point B est

$$\Delta : y=f'(0)(x-0)+f(0) \iff \Delta : y=\frac{-2(2\times 0+1}{(0-1)^3}x+0 \iff \Delta : y=2x$$

Grâce à Xcas, on sait que $f(x)-2x=\dfrac{-(2x-5)x^2}{(x-1)^2}$. Cette différence est clairement du signe de $-(2x-5)=-2x+5$, qui est positif sur $\left]-\infty;\dfrac{5}{2}\right[$ et positif sur $\left]\dfrac{5}{2};+\infty\right[$. Donc :
- La tangente est en dessous de la courbe au point B.
- Je pourrais détailler le reste, mais ce n'est pas réellement ce qui nous intéresse.

3. Ok

Exercice 2 : 129 p 87
Cet exercice vous demande d'avoir un minimum d'initiative et de rigueur dans la rédaction. Il s'agit de démontrer le théorème du point fixe. Soyez fier si vous avez réussi seuls !!
L'idée est d'utiliser le TVI, mais pour cela, il nous faut une fonction pour l'appliquer et répondre à la question. Posons alors g la fonction définie sur $[0;1]$ par $g(x)=f(x)-x$. Ainsi, résoudre l'équation $f(x)=x$ revient à résoudre $g(x)=0$, ie à trouver les éventuels antécédents de 0 par g.
- g est une fonction continue sur $[0;1]$ comme différence de fonctions continues sur $[0;1]$.
- $g(0)=f(0)-0=f(0)\geq 0$ car f prend ses valeurs dans $[0;1]$.
  $g(1)=f(1)-1\leq 0$ car $f(1)\leq 1$.
  Ainsi, $g(1)<0<g(0)$.
- D'après le TVI, il existe alors au moins un antécédent de 0 dans $[0;1]$.
  Donc l'équation $f(x)=x$ admet au moins une solution dans $[0;1]$.