DEVOIR MAISON 4 : CORRECTION

Exercice 1 : 98 p 78

1. Le volume de la bille est $V_{bille} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi \times 4^3 = \dfrac{256}{3}\pi$ cm^3.
   Le volume occupé du cylindre est donc $V_{cyl} = \pi r^2 \times h = \pi \times 10^2 \times 4 \times 2 = 800\pi$ cm^3.
   Ainsi, le volume d'eau est $V_{eau} = V_{cyl} - V_{bille} = 800\pi - \dfrac{256}{3}\pi = \dfrac{2144}{3}\pi$ cm^3.
2. Le rayon R de la bille doit être positif et inférieur à celui du cylindre. Donc $R \in]0;10[$.
3. On sait déjà que le volume « eau + bille » initial est $V_{cyl} = 800\pi$.
   De plus, si la bille a pour rayon R, alors on a que $V_{cyl} = \pi r^2 \times h = \pi \times 10^2 \times 2R = 200\pi R$.
   On a donc que R doit vérifier l'égalité :
   $$800\pi = 200\pi R \iff R = 4$$
   C'est déjà la solution trouvée (ce qui était évident, puisque l'on s'est appuyé sur elle pour arriver à l'équation). Et on ne trouve pas l'équation de l'énoncé. Donc il faut chercher autre chose ...
   En fait, c'est assez simple, on a aussi que $V_{cyl} = V_{eau} + V_{bille} = \dfrac{2144}{3}\pi + \dfrac{4}{3}\pi R^3$. Donc R doit aussi vérifier l'égalité :
   $$200\pi R = \frac{2144}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi R^3 \iff 600R = 2144 + 4R^3 \iff 150R = 536 + R^3 \iff R^3 - 150R + 536 = 0$$
   Ainsi, une nouvelle bille est solution si son rayon R vérifie l'équation (E) : $x^3 - 150x + 536 = 0$.
4. On appelle f la fonction définie sur $[0;10]$ qui à x associe $f(x) = x^3 - 150x + 536$.
   f est une fonction polynôme donc continue sur son domaine de définition.
   $f(0) = 536$ et $f(10) = 1000 - 1500 + 536 = 36$
   Donc d'après le TVI, on sait que l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution pour n'importe quel k entre 36 et 536. Mais ceci ne nous intéresse pas, car $0 \notin [36;536]$.
   Etudions alors les variations de f pour voir plus en détails si l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur $]0;10[$. Et puis non en fait ! On pourrait, mais l'énoncé nous demande de justifier l'existence d'une solution, pas son unicité. Comme je suis fatiguée, je vais jouer sur cette imprécision.
   Je teste $f(5) = 5^3 - 150 \times 5 + 536 = -89 < 0$. Bingo !!
   $0 \in [-89;536] \iff 0 \in [f(5); f(0)]$, donc d'après le TVI, $f(x) = 0$ admet bien au moins une solution dans $]0;5[$, donc a fortiori dans $]0;10[$.
   Cependant, je réfléchis un peu, et je me dis que cette solution est potentiellement le 4 du problème initial. Il y a peut-être une autre solution sur cet intervalle, mais plutôt que de la chercher sans savoir si elle existe, je constate que je peux aussi dire que $0 \in [-85;36] \iff 0 \in [f(5); f(10)]$, donc, d'après le TVI, $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]5;10[$, et cette fois, ce ne sera pas 4 !
   Il y a donc au moins une autre valeur possible de rayon, comprise entre 5 et 10 cm.
5. Un balayage à la calculatrice à 10^{-2} près nous fournit un encadrement de cette autre valeur possible pour R : $9.74 < R < 9.75$, donc $R \simeq 9.7$ cm

Exercice 2 : 108 p 83

1. $f = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x+1 & \text{et} \quad v(x) = x^3 - 1 \\ u'(x) = 1 & \text{et} \quad v'(x) = 3x^2 \end{cases}$
   Comme $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, on a $f'(x) = \dfrac{x^3 - 1 - 3x^2(x+1)}{\left(x^3-1\right)^2} = \dfrac{-2x^3 - 3x^2 - 1}{\left(x^3-1\right)^2}$.
   D'où
   $$P(x) = -2x^3 - 3x^2 - 1$$

2. **a.** $P'(x) = -6x^2 - 6x = -6x(x+1)$

On établit donc le tableau de variations de P à partir de celui du signe de P'.

x	$-\infty$		α		-1		0		$+\infty$
$-6x$				$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$				$-$	0	$+$		$+$	
$P'(x)$				$-$	0	$+$	0	$-$	
P	$+\infty$	↘	0	↘	-2	↗	-1	↘	$-\infty$

b. La fonction P est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme. De plus, d'après le tableau de variations et le corollaire du TVI, il existe une seule solution $\alpha \in]-\infty; -1[$ à l'équation $P(x) = 0$.

Par balayage à 10^{-3} nous donne $-1,678 < \alpha < 1.677$ donc $\alpha \simeq -1.68$

c. On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	

3. $f'(x)$ est du signe de $P(x)$ donc on a le tableau suivant :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	
f	0	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	0

4. **a.** On cherche la tangente au point d'abscisse 0, donc $T : y = f'(0)(x-0) + f(0) \iff T : y = -x-1$

b. Graphiquement, on conjecture (en zommant assez) que T va traverser la courbe $\mathscr{C}$ au point A. Démontrons cela, autrement dit, étudions le signe de la différence $f(x) - (-x-1)$.

$$\begin{aligned}
f(x) - (-x-1) &= \frac{x+1}{x^3-1} + x + 1 \\
&= \frac{x+1+(x+1)\times(x^3-1)}{x^3-1} \\
&= \frac{(x+1)(1+x^3-1)}{x^3-1} \\
&= \frac{x^3(x+1)}{x^3-1}
\end{aligned}$$

Etablissons alors le tableaux de signe de cette expression :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^3		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^3-1		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-(-x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	

Donc sur $]-\infty;-1[$, la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de T.
Sur $]-1;0[$, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de T.
Sur $]0;1[$, la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de T.
Sur $]1;+\infty[$, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de T.
Les courbes se coupent aux points d'abscisses -1 et 0.

5. On cherche la tangente au point d'abscisse -1, donc

$$\mathscr{D}: y = f'(-1)(x-(-1))+f(-1) \iff \mathscr{D}: y = -\frac{2}{4}(x+1)+0 \iff \mathscr{D}: y = -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$

Graphiquement, on conjecture (en zommant assez) que $\mathscr{D}$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}$ aux alentour du point d'abscisse -1.
Démontrons cela, autrement dit, étudions le signe de la différence $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} f(x)-\left(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right) &= \frac{x+1}{x^3-1}+\frac{1}{2}(x+1) \\ &= \frac{(x+1)\times 2+(x+1)\times(x^3-1)}{2(x^3-1)} \\ &= \frac{(x+1)(2+x^3-1)}{2(x^3-1)} \\ &= \frac{(x^3+1)(x+1)}{2(x^3-1)} \end{aligned}$$

Etablissons alors le tableaux de signe de cette expression :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
x^3+1		$-$	0	$-$		$+$	
x^3-1		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-\left(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)$		$-$	0	$+$	||	$+$	

Donc sur $]-\infty;1[$, la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de $\mathscr{D}$.
Sur $]-1;+\infty[$, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de T.
Les courbe se touchent au point d'abscisses -1.

6. Ok

Je n'ai pas détaillé les limites des tableaux de variations.
Pour P *elles n'étaient pas demandé (mais tellement simples qu'il aurait été inutile de les justifier).*
Pour f, on ne les demande pas non, mais comme j'utilise le TVI, j'en ai en fait besoin, et là, une justification serait le bienvenu sur votre copie. Comme elles ne sont pas compliquées non plus, je ne le fais pas ici. Ceux qui veulent des détails pourront toujours me demander.