DEVOIR MAISON 4 : SUITES ET FONCTIONS

Partie A : Cas $n = 2$ en valeur exacte

On cherche à résoudre l'équation (E_2) : $x + x^2 = 1$, qui est de degré 2, donc jusque là, pas de soucis.

(E_2) $\iff x^2 + x - 1 = 0$ et $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$. D'où $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$.

L'unique solution de (E_2) dans $[0;1]$ est donc $a_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \simeq 0.62$.

Partie B : Nombre de solutions de l'équation (E_n)

Soit $n \geq 2$. $\longrightarrow$ Il est important de comprendre que cela signifie que « n **est fixé** », donc ne varie pas pour toute cette partie ! Les résultats montrés dans cette partie seront donc valables pour n'importe quel $n \geq 2$, ie $\forall n \geq 2$.

1. $g_n'(x) = nx^{n-1}$ et $g_n(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0;1]$ donc g_n est une fonction strictement croissante sur $[0;1]$
2. On pourrait dériver f_n puis étudier le signe de f_n', mais il est plus rapide de dire que f_n est une somme de fonctions strictement croissantes sur $[0;1]$, donc f_n l'est aussi $\longrightarrow$ d'où le « **en déduire** » de la question.
3. f_n est une fonction polynôme, donc continue sur $[0;1]$ et f_n est strictement croissante sur $[0;1]$ d'après B.2.
De plus $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1 + 1^2 + \dots 1^n = n \geq 2$. Donc $f_n(0) \leq 1 \leq f_n(1)$.
D'après le corollaire du TVI, il existe un unique $c \in [0;1]$ tel que $f_n(c) = 1$, ie une unique solution, notée a_n, à l'équation (E_n) dans $[0;1]$.

Partie C : Cas $n = 3$ en valeur exacte

1. On pose donc $x = X - \dfrac{1}{3}$. Ainsi (E_3) $\iff \left(X - \dfrac{1}{3}\right) + \left(X - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(X - \dfrac{1}{3}\right)^3 = 1$ ou encore :

$$\begin{aligned}
(E_3) &\iff \left(X - \frac{1}{3}\right) + \left(X^2 - \frac{2}{3}X + \frac{1}{9}\right) + \left(X^3 + 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)X^2 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 X + \left(-\frac{1}{3}\right)^3\right) = 1 \quad \bigstar \\
&\iff X - \frac{1}{3} + X^2 - \frac{2}{3}X + \frac{1}{9} + X^3 - X^2 + \frac{1}{3}X - \frac{1}{27} = 1 \\
&\iff X^3 + \frac{2}{3}X - \frac{7}{27} = 1 \qquad \iff X^3 + \frac{2}{3}X - \frac{34}{27} = 0
\end{aligned}$$

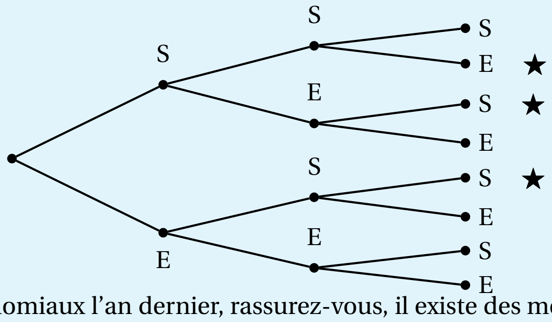
★ *Formule du binôme*

J'ai utilisé la formule du binôme vue en 1S pour certains d'entre vous : $\forall n \geq 0$ on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ (se lit « k **parmi** n ») étant le nombre façons d'obtenir k Succès en n **épreuves de Bernoulli** (Succès ou Echec).

Par exemple $\binom{3}{2} = 3$ car il y a trois chemins contenant 2 Succès S dans l'arbre ci-contre.



Pour ceux qui n'ont pas vu les coefficients binomiaux l'an dernier, rassurez-vous, il existe des méthodes plus rapides que construire l'arbre et compter pour trouver leur valeur !
Les coefficients binomiaux ont plusieurs utilités. Je ferai bientôt des « rappels »...

2. $\Delta = 4 \times \dfrac{2^3}{3^3} + 27 \times \dfrac{34^2}{27^2} = 4 \times \dfrac{8}{27} + \dfrac{1156}{27} = \dfrac{1188}{27}$
3. D'après Cardan, comme $\Delta > 0$, l'unique solution de $X^3 + \dfrac{2}{3}X - \dfrac{34}{27} = 0$ est donc :

$$X = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\frac{34}{27} + \sqrt{\frac{1188}{27^2}}\right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\frac{34}{27} - \sqrt{\frac{1188}{27^2}}\right)}$$

Cependant, comme nous allons devoir taper cela à la calculatrice la question suivante, commençons par écrire un peu mieux cette expression à la main, cela évitera les erreurs ensuite. Accrochez-vous !
Il faut savoir que la racine cubine a les mêmes propriétés de calcul de que la racine carré. Ainsi :

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\frac{34}{27}+\frac{\sqrt{1188}}{27}\right)} = \sqrt[3]{\frac{17}{27}+\frac{\sqrt{1188}}{2\times 27}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}\left(17+\frac{\sqrt{1188}}{2}\right)} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{17+\frac{\sqrt{1188}}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{17+\frac{\sqrt{4\times 297}}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{17+\frac{2\sqrt{297}}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{17+\sqrt{297}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{17+\sqrt{9\times 33}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{17+3\sqrt{33}}$$

Là, on ne peut plus rien simplifier, même si cela reste compliqué ... Finalement $X = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{17+3\sqrt{33}}+\sqrt[3]{17-3\sqrt{33}}\right)$

Et donc $x = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{17+3\sqrt{33}}+\sqrt[3]{17-3\sqrt{33}}\right)-\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{17+3\sqrt{33}}+\sqrt[3]{17-3\sqrt{33}}-1\right)$

4. A la calculatrice, on trouve $a_3 \simeq 0.544$ ce qui appartient bien à l'intervalle $[0;1]$. Ouf !! Vu que Cardan dit qu'il n'y a qu'une solution à notre équation, et que nous, nous avons dit dans la partie B qu'il y en avait une unique dans $[0;1]$, on aurait été bien embêté d'en trouver une ailleurs ...

Partie D : Cas $n = 4$ et $n = 5$ en valeur approchée

2. L'algorithme suivant cherche une valeur approchée de a_4 par dichotomie.
3. Le a est la borne inférieure de notre intervalle $[0;1]$ où l'on cherche a_4, le b la borne supérieure.
   e est l'écart maximum désiré entre la vleur exacte de a_4 et la solution approchée renvoyée par l'algorithme.
4. On rentre $a = 0$, $b = 1$ et $e = 0.001$. L'ordinateur nous renvoit que a_4 est compris entre 0.518 et 0.519
5. Il faut modifier la fonction F1 et mettre F1(x)=x+pow(x,2)+pow(x,3)+pow(x,4)+pow(x,5)-1
   L'ordinateur nous dit que a_5 est compris entre 0.507 et 0.508.
6. Il semble que la suite (a_n) soit décroissante et convergente vers 0.5.

Partie E : Etude de la suite (a_n)

Erratum : Ici je m'aperçois en tapant la correction que j'aurai dû commencer cette partie par dire « Soit $n \geq 2$. », car on retourne au cas général. J'espère que cela ne vous a pas trop perturbé !

1. **a.** Par définition, on sait que pour tout $n \geq 2$ on a $0 \leq a_n \leq 1$. La fonction g_n de la partie B étant pour tout n, donc en particulier pour k, strictement croissante sur $[0;1]$, on sait que :

$$a_{n+1} \geq a_n \iff g_k(a_{n+1}) \geq g_k(a_n) \iff a_{n+1}^k \geq a_n^k$$

b. et c. $\sum_{k=1}^{n+1} a_{n+1}^k = a_{n+1} + a_{n+1}^2 + a_{n+1}^3 + \cdots + a_{n+1}^n + a_{n+1}^{n+1}$

Remarquons que sous le Sigma, la variable est k, c'est donc l'exposant k qui augmente de 1 à chaque terme de la somme (et non l'indice, qui lui dépend de n, et est donc fixé, d'après mon erratum)
Remarquons ensuite que par définition des a_n, cette somme vaut simplement 1.
$\sum_{k=1}^{n+1} a_n^k = a_n + a_n^2 + a_n^3 + \cdots + a_n^n + a_n^{n+1}$
Par définition des a_n toujours, cette somme vaut simplement $1 + a_n^{n+1}$
D'après le 1.a, on sait que $\sum_{k=1}^{n+1} a_{n+1}^k \geq \sum_{k=1}^{n+1} a_n^k$.
Cependant, d'après nos remarques, ceci équivaut à $1 \geq 1 + a_n^{n+1}$ avec $a_n^{n+1} \geq 0$.
La seule valeur possible pour a_{n+1} serait alors 0, mais il est clair que 0 n'est jamais solution de (E_n) !
Il y a donc une absurdité. On en déduit que notre hypothèse est fausse, autrement dit $a_{n+1} < a_n \quad \forall n$.

2. La suite (a_n) est décroissante et minorée par 0, donc convergente vers un réel ℓ.
3. On sait depuis le chapitre des suites géométriques que

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{1}\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donc $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \qquad \text{car } -1 < \frac{1}{2} < 1$