DEVOIR MAISON 4 : SUITES ET FONCTIONS

L'objectif de cet exercice est d'étudier pour tout $n \geq 2$ les solutions sur $[0;1]$ de l'équation

$$(\mathrm{E}_n) : x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = 1$$

Les parties ne sont pas indépendantes.

Partie A : Cas $n = 2$ en valeur exacte

Déterminer la solution de l'équation (E_2). On note a_2 cette solution.

Partie B : Nombre de solutions de l'équation (E_n)

Soit $n \geq 2$. On définit les fonctions f_n et g_n sur $[0;1]$ par $g_n(x) = x^n$ et $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction g_n sur $[0;1]$.
2. En déduire le sens de variation de la fonction f_n sur $[0;1]$
3. Montrer que l'équation $x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = 1$ a une unique solution dans $[0;1]$.

Pour tout $n \geq 2$, on note a_n cette solution (on a déjà déterminer a_2), et on définit ainsi la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ des solutions de ces équations.

Partie C : Cas $n = 3$ en valeur exacte

L'objectif de cette partie est de déterminer la valeur exacte de a_3, en utilisant la formule de Cardan[1], qui n'est pas à connaître, heureusement!!

Formule de Cardan

On considère l'équation $\mathrm{X}^3 + p\mathrm{X} + q = 0$, avec p et q deux réels fixés.
On note Δ le discriminant du polynôme $\mathrm{X}^3 + p\mathrm{X} + q$ (de degré 3) et on a $\Delta = 4p^3 + 27q^2$.
Si $\Delta > 0$, alors l'équation $\mathrm{X}^3 + p\mathrm{X} + q = 0$ possède une unique solution réelle, qui est :

$$\mathrm{X} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q + \sqrt{\frac{\Delta}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q - \sqrt{\frac{\Delta}{27}}\right)}$$

où l'on admet que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt[3]{a}$ est l'unique solution réelle de l'équation $x^3 = a$ et se lit « racine cubique de a »

Les cas $\Delta \leq 0$ se traitent également avec des formules du même type, mais pour les utiliser, il faut connaître les nombres complexes, que vous découvrirez d'ici peu ...

On cherche donc à résoudre $(\mathrm{E}_3) : x + x^2 + x^3 = 1$.

1. En posant $x = \mathrm{X} - \frac{1}{3}$ dans (E_3), montrer que $\quad (\mathrm{E}_3) \iff \mathrm{X}^3 + \frac{2}{3}\mathrm{X} - \frac{34}{27} = 0$
2. Calculer le discriminant de $\mathrm{X}^3 + \frac{2}{3}\mathrm{X} - \frac{34}{27}$
3. En déduire l'unique solution réelle de (E_3).
4. Vérifier à la calculatrice[2] cette solution appartient à $[0;1]$, et est donc a_3.

1. L'histoire a retenu ce nom, mais en réalité, Cardan se serait approprié la méthode en la volant délibérément à Niccolò Fontana dit Tartaglia (« Le Bègue »)

2. En utilisant la touche $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ de la calculatrice, ou encore si vous ne l'avez pas, en utilisant la notation $\sqrt[3]{a} = a^{1/3}$, que l'on justifiera plus tard dans l'année

Partie D : Cas $n = 4$ et $n = 5$ en valeur approchée[3]**.**

Désormais, nous alors chercher une valeur approchée de a_4.

1. Recopier l'algorithme suivant sur Algobox

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  e EST_DU_TYPE NOMBRE
  m EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE e
  TANT_QUE (b-a>e) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    m PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
    SI (F1(a)*F1(m)<=0) ALORS
      DEBUT_SI
      b PREND_LA_VALEUR m
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        a PREND_LA_VALEUR m
        FIN_SINON
    FIN_TANT_QUE
  a PREND_LA_VALEUR floor(a/e)*e
  b PREND_LA_VALEUR a+e
  AFFICHER "La solution est comprise entre "
  AFFICHER a
  AFFICHER " et "
  AFFICHER b
FIN_ALGORITHME

Fonction numérique utilisée : F1(x)=x+pow(x,2)+pow(x,3)+pow(x,4)-1
```

2. Que fait-il ?
3. A quoi correspondent les variables a, b et e ?
4. Faire tourner ce programme pour trouver une solution approchée à 10^{-3} près de a_4.
5. Que faut-il modifier dans l'algorithme pour trouver une valeur approchée a_5 ?
   En donner une à 10^{-3} près.
6. Quelles conjectures pouvez-vous faire sur le sens de variation et la convergence de (a_n) ?

Partie E : Etude de la suite (a_n)

1. On cherche à connaître le sens de variation de la suite (a_n). Pour cela, raisonnons par l'absurde : on suppose qu'il existe un $n \geq 2$ tel que $a_{n+1} \geq a_n$.
   - **a.** Comparer alors a_{n+1}^k et a_n^k pour tout $k \geq 1$.
   - **b.** Ecrire les sommes suivantes sans le symbole $\sum$ puis les comparer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_{n+1}^k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_n^k$
   - **c.** Quelle contradiction obtient-on ? Conclure.
2. Expliquer pourquoi la suite (a_n) converge vers un réel ℓ.
3. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$.

   On admettra que $\ell = \dfrac{1}{2}$.

3. Les équations de degré 4 sont également résolubles par radicaux, ie en utilisant des formules générales donnant les solutions en fonction des coefficients du polynôme, et en utilisant seulement les quatre opérations habituelles, ainsi que l'extraction des racines.
Par contre, il a été démontré par Ruffini, Abel et Galois qu'il n'existe pas de formule générale exprimant les solutions de l'équation du cinquième degré ou plus sous forme de radicaux.