CORRECTION DU DEVOIR D'ENTRAÎNEMENT
LES MATHS : L'INTÉGRALE !

Exercice 1 : **10 points**

Partie I

1. L'axe des ordonnées est asymptote à $\mathscr{C}_2$ au voisinage de 0 ; la fonction étant décroissante sur $]0~;~+\infty[$, la limite quand x tend vers 0 de $f_2(x)$ est $+\infty$.
2. De même la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_2(x)$ est 0.
3. On ne peut pas savoir.
4. Sur $]0~;~1[$ la fonction différence est positive, s'annule en 1, puis est négative : c'est donc le troisième tableau.

Partie II

1. On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$, d'où par somme de limites $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. f somme de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et : $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.
   Chacun des termes est positif sur $]0~;~+\infty[$, donc la dérivée est positive sur cet intervalle, donc la fonction est croissante de moins l'infini à plus l'infini.
3. On a de façon évidente $f(1) = \ln 1 + 1 - \dfrac{1}{1} = 0$. La fonction étant croissante sur $]0~;~+\infty[$, on a donc :
   - $f(x) < 0$ sur $]0~;~1[$;
   - $f(1) = 0$;
   - $f(x) > 0$ sur $]1~;~+\infty[$.
4. F somme de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
   $\mathrm{F}'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} = \ln x + 1 - \dfrac{1}{x} = f(x)$. F est donc une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$.
5. On vient de voir que $\mathrm{F}'(x) = f(x)$ et d'après la question 5, $f(x) > 0$ sur $]1~;~+\infty[$, donc F est croissante sur cet intervalle.
6. On a $\mathrm{F}(1) = 1\times 0 - 0 = 0$ et $\mathrm{F}(\mathrm{e}) = \mathrm{e}\ln\mathrm{e} - \ln\mathrm{e} = \mathrm{e} - 1 \approx 1,7$.
   D'autre part $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0,63$, donc $0 < 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} < \mathrm{e} - 1$.
   La fonction F est dérivable donc continue sur $[1~;~\mathrm{e}]$: il existe donc un unique réel $\alpha \in [0;~\mathrm{e}]$ tel que $\mathrm{F}(\alpha) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
7. La calculatrice donne : $\mathrm{F}(1,9) - 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx -0,05$ et $\mathrm{F}(2,0) - 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}} = 0,06$, donc : $1,9 < \alpha < 2,0$.

Partie III

1. L'ordonnée de A est égale à 0 ; il faut donc résoudre l'équation :
   $\ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -1 \iff \mathrm{e}^{\ln x} = \mathrm{e}^{-1}$ (par croissance de la fonction exponentielle) $\iff x = \mathrm{e}^{-1}$.
   On a donc $\mathrm{A}\left(\mathrm{e}^{-1}~;~0\right)$.
2. P étant commun aux deux courbes son abscisse vérifie :
   $g(x) = h(x) \iff \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1 \iff f(x) = 0$, d'après la partie II. Or dans cette partie on a vu que f s'annule en 1 et $g(1) = h(1) = 1$. Donc le point commun aux deux courbes est le point $\mathrm{P}(1~;~1)$.
3. **a.** On a vu que sur $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}~;~1\right]$, $f(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire que $g(x) \geqslant h(x)$ (la courbe $\mathscr{C}_g$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_h$), donc
   $\mathscr{A} = \displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} [g(x) - h(x)]\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} -f(x)\,\mathrm{d}x$.

   b. On a vu qu'une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$, donc en particulier sur $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}~;~1\right]$ est $\mathrm{F}(x) = x\ln(x) - \ln(x)$.
   On a donc : $\mathscr{A} = [-\mathrm{F}(x)]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} = -\mathrm{F}(1) + \mathrm{F}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = 0 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) - \ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \times (-\ln(\mathrm{e})) - (-\ln(\mathrm{e})) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
4. **a.** On a vu que sur $[1~;~+\infty[$, $h(x) \geqslant g(x)$, donc puisque $t \geqslant 1$, l'aire $\mathscr{B}_t$ est égale à :
   $\mathscr{B}_t = \displaystyle\int_1^t [h(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_1^t f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(t) - \mathrm{F}(1) = \mathrm{F}(t) = t\ln(t) - \ln t$.

   b. On a vu que $\mathscr{B}_t = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ ou encore $t\ln(t) - \ln t = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ soit $\mathrm{F}(t) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ équation qui a été résolue à la question 6 de la partie II et qui a pour solution $\alpha \approx 1,9$.