DEVOIR SURVEILLÉ 1 : RÉCURRENCE ET LIMITES DE SUITES

Exercice 1 : Opérations sur les limites et FI (4 points)

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Par soustraction, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n^4 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (0.9)^n = 0$ car $-1 < 0.9 < 1$.

Par addition, on obtient une forme indéterminée.

D'aucuns diront que c'est le terme de plus haut degré dans l'expression $5n^4 - 3n^3$ qui l'emporte et que donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n^4 - 3n^3 = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n^4 - 3n^3 + 0.9^n = +\infty$ et ils n'auront pas tort.

Cependant, en Terminale S, on attend que vous justifiez cela en factorisant l'expression par son terme de plus au degré :

$5n^4 - 3n^3 = n^4\left(5 - \dfrac{3}{n^2}\right)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 - \dfrac{3}{n^2} = 5$

Par produit, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n^4 - 3n^3 = \lim\limits_{n\to+\infty} n^4\left(5 - 3\dfrac{1}{n^2}\right) = +\infty$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n^4 - 3n^3 + 0.9^n = +\infty$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^3 + 27n^2 + 7}{0.1n^5 - 4}$ Par quotient, on obtient là encore une forme indéterminée.

D'aucun diront que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^3 + 27n^2 + 7}{0.1n^5 - 4} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^3}{0.1n^5} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{0.1n^2} = 0$ et ils n'auront pas tort.

Cependant, en Terminale S, on attend que vous factorisiez pour justifier. Ainsi :

$$\frac{4n^3 + 27n^2 + 7}{0.1n^5 - 4} = \frac{n^3\left(4 + \dfrac{27}{n} + \dfrac{7}{n^3}\right)}{n^5\left(0.1 - \dfrac{4}{n^5}\right)} = \frac{4 + \dfrac{27}{n} + \dfrac{7}{n^3}}{n^2\left(0.1 - \dfrac{4}{n^2}\right)}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 + \dfrac{27}{n} + \dfrac{7}{n^3} = 4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(0.1 - \dfrac{4}{n^2}\right) = +\infty$ Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^3 + 27n^2 + 7}{0.1n^5 - 4} = 0$

4. On sait déjà que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0.9^n = 0^+$ car $-1 < 0.9 < 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7}{0.9^n} = +\infty$ (par quotient et avec la règle des signes)

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 6 - \dfrac{7}{0.9^n} = -\infty$

Exercice 2 : Limites et comparaison (5 points)

1. **a.** $u_{100} \simeq 2.4873$ et $u_{1000} \simeq 2.4987$ On peut conjecturer que la suite tend vers 2.5.

b. On sait depuis la grande section de maternelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1 \iff 3 \geq -3\cos(n) \geq 3 \iff 5n^2 - 3 \geq 5n^2 - 3\cos(n) \geq 5n^2 + 3\cos(n)$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $2n^2+n+1>0$ donc on a $\dfrac{5n^2-3}{2n^2+n+1} \geq \dfrac{5n^2-3\cos(n)}{2n^2+n+1} \geq \dfrac{5n^2+3}{2n^2+n+1}$

Comme $\dfrac{5n^2-3}{2n^2+n+1} = \dfrac{n^2\left(5-\dfrac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{5-\dfrac{3}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^2-3}{2n^2+n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5-\dfrac{3}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{5}{2}$

De même $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^2+3}{2n^2+n+1} = \dfrac{5}{2}$

D'après le théorème des gendarmes, on peut conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^2-3\cos(n)}{2n^2+n+1} = \dfrac{5}{2}$

2. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $-1 \leq \sin(n) \leq 1 \iff n^2-1 \leq v_n \leq n^2+1$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-1 = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

b. On est sûr que $v_n > 10^6$ lorsque $n^2+1 > 10^6 \iff n^2 > 10^6+1 \iff n > \sqrt{10^6+1}$ car $n \geq 0$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $-1 \leq (-1)^n \leq 1 \iff -3 \leq (-1)^n - 2 \leq -1 \iff -3n \leq w_n \leq -n$ car $n \leq 0$ Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$ donc d'après le théorème de comparaison on a $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$

Exercice 3 : **Utilisation d'une suite auxiliaire** (4 points)

1. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{4}{5} - 1 = \dfrac{1}{5}u_n - \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{5}(u_n-1) = \dfrac{1}{5}v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = 12$

b. On sait alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_n = v_0 \times q^n = 12 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

Donc $u_n = v_n + 1 = 12 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 1$

Or $-1 < \dfrac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 12\left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 1 = 1$

2. **a.**

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k - n - 1 = \sum_{k=0}^{n}\left(12\left(\frac{1}{5}\right)^k + 1\right) - n - 1 = 12\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} 1 - n - 1 \\
&= 12 \times \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}} + n + 1 - n - 1 = 12\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{4}{5}} \\
&= 12 \times \frac{5}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right) = 15\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

b. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1} = 0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 15$

Exercice 4 : **Suite récurrente** (5 points)

1. **a.** Cf votre sujet.

   b. On peut conjecturer que la suite est décroissante et converge vers l'abscisse du point d'intersection des Δ et $\mathscr{C}$.

2. Initialisation : pour $n=0$

   $u_0 = 4$ et $u_1 = \sqrt{\dfrac{1+4}{2}} = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$. Donc on a bien $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 4$

   Hérédité : On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 4$. Alors on a

$$\begin{aligned}
0 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 4 &\iff 1 \leq 1+u_{k+1} \leq 1+u_k \leq 5 \iff \frac{1}{2} \leq \frac{1+u_{k+1}}{2} \leq \frac{1+u_k}{2} \leq \frac{5}{2} \\
&\iff \sqrt{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{1+u_{k+1}}{2}} \leq \sqrt{\frac{1+u_k}{2}} \leq \sqrt{\frac{5}{2}} \quad \text{car la fonction racine carré est croissante su} \\
&\implies 0 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 4
\end{aligned}$$

   Donc la proposition est héréditaire.

   Conclusion : la proposition est héréditaire et initialisée. Elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. La suite est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

4. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} = \ell$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}^2 = \ell^2$ par produit.

   De plus on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+u_n}{2} = \dfrac{1+\ell}{2}$

   Par unicité de la limite on a donc $\ell^2 = \dfrac{1+\ell}{2}$

   On résout cette équation : $\ell^2 = \dfrac{1+\ell}{2} \iff 2\ell^2 = 1+\ell \iff 2\ell^2 - \ell - 1 = 0$

   $\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-1) = 9$

   Donc $\ell_1 = \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2} < 0$ ce qui est impossible car on a montré que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   Et $\ell_2 = \dfrac{1+3}{4} = 1$. Donc $\ell = 1$

Exercice 5 : **Récurrence** (2 points)

Initialisation : pour $n = 0$

On a $S_0 = u_0 = \dfrac{2\times 0 - 1}{2^0} = -1$ et $\dfrac{2^{0+1} - 2\times 0 - 3}{2^0} = \dfrac{2-3}{1} = -1$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$

Hérédité : On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $S_k = \dfrac{2^{k+1} - 2k - 3}{2^k}$. Alors

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= S_k + u_{k+1} = \frac{2^{k+1} - 2k - 3}{2^k} + \frac{2(k+1) - 1}{2^{k+1}} \quad \text{(HR)} \\
&= \frac{2^{k+2} - 4k - 6 + 2k + 2 - 1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+2} - 2k - 5}{2^{k+1}} \\
&= \frac{2^{k+2} - 2k - 2 - 3}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+2} - 2(k+1) - 3}{2^{k+1}} \quad \text{CQFD}
\end{aligned}$$

Donc la proposition est héréditaire.

La proposition est initialisée et héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.