DEVOIR MAISON 1 : LE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Exercice 1 : **Vrai ou faux ? *Justifier***

1. **FAUX** Héréditaire ne veut pas dire vrai ! Il faut une initialisation à $n = 0$.
2. **VRAI** C'est le principe de récurrence.
3. **FAUX** On sait simplement que la proposition est vraie $\forall n \geq 1$, on ne sait rien avant.
4. **FAUX** Des exemples ne prouvent rien ! Pour montrer l'hérédité, il faut le faire dans le cas général.
5. **FAUX** On ne sait pas si la proposition est vraie pour $n = 3$, ni $n = 4$. Par contre, on sait qu'elle est vraie $\forall n \geq 5$.
6. **VRAI** C'est le cas précédent corrigé.
7. **FAUX** On ne sait pas si la proposition est vraie pour $n = 4$, ni $n = 5$, ni après.
8. **FAUX** Même expliquation que précédemment.

Exercice 2 :

1. La proposition à montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ est $\mathscr{P}(n)$: « $u_{n+1} = 5u_n$ ».

   Initialisation : Pour $n = 0$
   D'après l'énoncé, on a $u_0 = 3$ et $u_1 = 15$. Donc on a bien $u_1 = 5u_0$.
   La proposition est vraie au rang 0.

   Attention à la présentation ! On vérifie que l'on a l'égalité en regardant* séparément*les valeurs de ses membres pour* $n = 0$*, puis en les comparant.

   Hérédité : On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_{k+1} = 5u_k$.
   On veut montrer que cela entraine $u_{k+2} = 5u_{k+1}$.
   Or on sait d'après l'énoncé que

$$\begin{aligned} u_{k+2} &= 3u_{k+1} + 10u_k \\ &= 3u_{k+1} + 2 \times 5u_k \\ &= 3u_{k+1} + 2u_{k+1} \qquad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 5u_{k+1} \end{aligned}$$

   Donc la proposition est héréditaire à partir de 0.

   Préciser où l'on utilise l'hypothèse de récurrence et où l'on utilise l'énoncé évite les confusions

   Conclusion : La proposition est initialisée à 0 et héréditaire à partir de 0.
   Elle est donc vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = 5u_n$, donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 5$.
   On sait alors que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = u_0 \times q^n = 3 \times 5^n$.

Exercice 3 :

1. La proposition à montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ est $\mathscr{P}(n)$: « $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ».

   ou encore $1+q+q^2+\dots q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

   Initialisation : Pour $n=0$
   *Là encore, on regarde **séparément** les valeurs des membres de l'égalité pour $n=0$ puis on les compare.*
   $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1$ et $\frac{1-q^{0+1}}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} = 1$. Donc on a bien $\sum_{k=0}^{0} q^k = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$.
   La proposition est vraie au rang 0.

   Hérédité : On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{p} q^k = \frac{1-q^{p+1}}{1-q}$.

   La lettre k étant déjà utilisée, on doit donc en prendre une autre pour notre hypothèse, ou encore changer celle dans la somme
   On veut montrer que cela entraine $\sum_{k=0}^{p+1} q^k = \frac{1-q^{p+2}}{1-q}$.

$$\begin{aligned}
\text{Or}\quad \sum_{k=0}^{p+1} q^k &= 1+q+q^2+\cdots+q^p+q^{p+1} \\
&= \frac{1-q^{p+1}}{1-q} + q^{p+1} \qquad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1-q^{p+1}}{1-q} + \frac{(1-q)q^{p+1}}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{p+1}+q^{p+1}-q^{p+2}}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{p+2}}{1-q}
\end{aligned}$$

   Donc la proposition est héréditaire à partir de 0.

   Conclusion : La proposition est initialisée à 0 et héréditaire à partir de 0.
   Elle est donc vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &= u_0+u_1+\cdots+u_n \\
&= u_0+u_0\times q+u_0\times q^2+\cdots+u_0\times q^n \qquad \text{car } (u_n) \text{ est une suite géométrique} \\
&= u_0\left(1+q+q^2+\cdots+q^n\right) \\
&= u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \text{d'après le 1)}
\end{aligned}$$